

TOSHIHIRO ICHIDA SEMINAR

A.KOHNO×M.OKADA×N.TAKAHASHI×S.AZUMA×T.NAKAMURA

経 済 数 学

ト ピ ッ ク ス Ver. 2

数学的手法の意義と意味

市田敏啓ゼミナール

経済数学トピックス

第2版

～数学的手法の意義と意味～

我妻さやか
岡田 真大
河野愛一郎
高橋 伯明
中村 透

著

＝はじめに＝

本書は、早稲田大学商学部 商業・貿易・金融コースの市田敏啓ゼミナールに所属する5名によって2007年の12月に作成された参考書です。学部レベル初級から中級の経済学で必要とされる数学的手法を、中等教育（中学や高校）における数学の範囲およびそれを発展させたものを、その意義や意味を分かりやすく説明できるよう心がけて編集致しました。特に、初級の経済学を学び終えて、これから中級の経済学を学ぼうとしている人を主たる対象として想定しております。

本書では、最適化理論や統計学の基礎、高度な微分・積分の方法、行列、位相、問題演習などについては欠いております。そのため、日本評論社「経済学に最小限必要な数学【高校数学編】」や「経済学で出る数学—高校数学からきちんと攻める」と補完関係に当たると言えます。3書をうまくピックアップして学習されることがベストの学習方法だと考えております。各ページ下にある注釈を含めて、学習して下さい。付録は、経済学では滅多に使用しませんので、参考にしたいときだけご覧下さい。

本書は100ページ余りにも及びますが、2週間ほどで全て作成した事情から、細部に若干誤植などがあるようです。そうしたものを見つけられた際には是非ご連絡ください。

本書の執筆にあたり、市田ゼミ2期生・3期生の中村透くん、岡田真大くん、高橋伯明くん、我妻さやかさんにはかなり無理をして編集して頂きました。現在、早稲田大学大学院基幹理工学研究科博士課程在籍で市田ゼミ1期生の赤星立さんには、いくつも有効なアドバイスを頂きました。この場を借りて御礼申し上げます。

2008年11月23日

著者一同を代表して、

河野 愛一郎

＝目次＝

はじめに	4
------	---

1	集合・論理・記号（高橋・中村・岡田・河野）	5
2	関数についての基礎知識（河野・我妻）	21
3	極限（高橋・中村）	32
4	微分とその利用／グラフの描き方（河野）	36
5	線形計画法（河野）	41
6	微分可能性（河野）	43
7	全微分（岡田・河野）	54
8	積分とその利用／面積の求め方（中村・岡田・高橋）	57
9	対数の基本的な性質（河野）	60
10	対数の微分とその利用（河野）	67
11	ベクトルの基本概念（河野）	74
12	ベクトルの基本性質（岡田）	80
13	確率論の基礎知識（河野）	86
14	経済数学単語集（我妻）	96

付録 1	数列	106
付録 2	三角比	111
付録 3	ベクトルの基本公式	114
付録 4	複素数	123
付録 5	解答の書き方などについての注意	125

著者紹介	128
------	-----

1 集合・論理・記号（高橋・岡田・中村・河野）

本章では，社会人として必要不可欠な知識である集合と論理について説明する．集合と論理では，単に数学の学習で終わらせることなく実生活で活かせるような考え方を，なるべく身近な例をとりあげ，提供する努力をしたので，皆さんにご活用願いたいと思っている．

＝目次＝

1. 集合の定義とその性質
2. 論理記号，規則の説明
3. 直積集合
4. ベクトルの大小関係を表すにはどうすればよいか？
5. 経済数学で使用するその他の記号・論理・概念

1. 集合の定義とその性質

1. 1 集合の定義

集合の定義として，とある国語の辞書で以下のように書かれている．

「ある条件を満たすものの集まり」

しかし，実際のところこの言葉では説明できない集合がでてしまう．例えば，「十分に大きな自然数全体の集まり」である．「十分に大きな」だけでは，いったいどこまで大きいのが判断ができないからである．したがって，範囲の明確でない集合は数学では集合とは呼ばない．数学における集合とは，

**「どんなものをもってきても，それがその集
まりの中にあるか明瞭に判断できる集まり」**のことをいう．

この考えの下では，あるもの(数学ではこの要素を「**元**」という)がその集まりの中にあるかは二つに一つである．その一方で，「ある条件を満たすものの集まり」では，その要素がその集まりに含まれるか否かが曖昧になる．数学上「集

合」ではこの曖昧さを必ず排除する．ただし，その判定が容易であるかどうかは判定が難しく，今のところ言及がされていない．また，その判定を下すため，前もって規則の正否を定める論理が決まっていなくてはならない．よって，その前もった集合を以下のように定めている．

N: 自然数全体の集合¹

Z: 整数全体の集合

R: 実数全体の集合

K: ベクトル空間全体の集合 *etc...*²

(例) 文字の定義

例えば， x という文字を使用する際，その文字の定義が必ず必要だが，「 x は実数」と書いてもいいが，「 $x \in \mathbf{R}$ 」と書いてもいい．ちなみに $\in$ は要素を表す記号．

「 $x \in \mathbf{R}$ 」なら，「 x は $\mathbf{R}$ に含まれる」という意味．ちなみに，「 x は正の実数」は「 $x \in \mathbf{R}_+$ 」と書けばよい．³

1. 2 集合の表記

集合の表記には 2 種類存在する．

(1) $\{ \}$ の中に要素を全て列挙して表す方式

(2) 集合をつくる条件を示す方法で $\{x \mid p(x)=t\}$ のように表す方式⁴

集合を扱っているとき，そこで扱っている対象の全てのものの集合を**全体集合**といい，ふつう $\mathbf{U}$ で表す．また，元の全くない集合を**空集合**といい， ϕ または $\{ \}$ で表す．

¹ 一般に自然数とは，正の整数である．しかし， 0 を含むと考える場合もある（ペアノの公理：Peano axiom）． 0 を含むかどうかが大きくかわる局面においては，使用する際に定義しておくことが望まれる．

² ベクトルについては 11 章および 12 章を参照せよ．

³ 負なら， $x \in \mathbf{R}_-$ となる．ちなみに，負や正には 0 を含まないので注意すること．

⁴ 「 $\mid$ 」の記号の右は，左に対する条件が入る．つまり， $\{x \mid p(x)=t\}$ は，「 $p(x)=t$ を満たす x を要素とする集合」という意味になる．

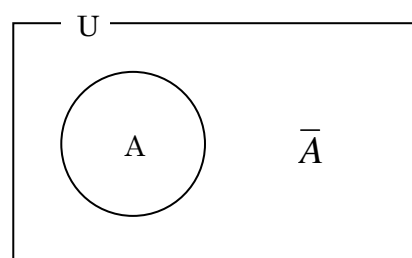
また、集合Aに対して、Uの要素でAに含まれないものの集合を**Aの補集合**といい、ふつう $\bar{A}$ ⁵で表す。ちなみに、補集合には次の性質がある。

$$\overline{(\bar{A})} = A, \quad \overline{U} = \phi, \quad \overline{\phi} = U$$

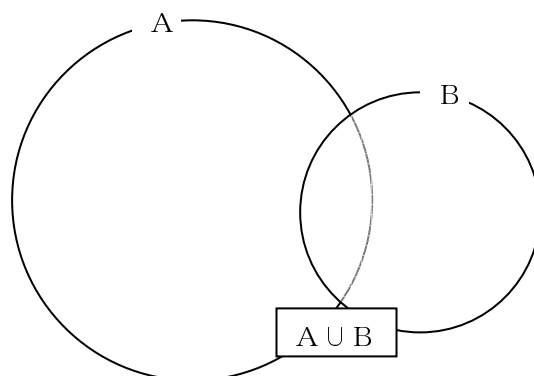
2つの集合A, Bが全く同じ要素を持っているとき、**AはBと等しい**といい、**A=B**で表す。また、2つの集合A, Bがあり、Aの要素をBが全て所有しているとき、**AをBの部分集合**といい、**A $\subseteq$ B**と表す。また、A $\subseteq$ Bであり、かつA $\neq$ B (Aのどの要素もBをはみ出していない)のとき、**AはBの真部分集合**といい、**A $\subset$ B**と表す。つまり、言い換えれば、「**A $\subset$ B**」は「AがBに含まれる」ということを表す。

1. 3 ベン図

集合の包含関係など、直接目で見える形にして表したのが右図の**ベン図**である。また、空集合は常に集合の部分集合と考える。



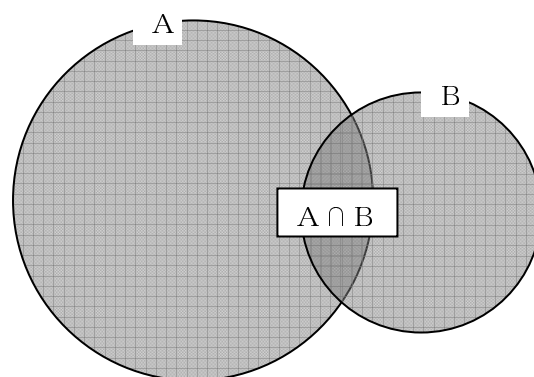
2つの集合A, Bの少なくとも一方に所属する要素全体の集合を**AとBの和集合**といい、**A $\cup$ B**で表す。⁶



すなわち、和集合の要素xは、

$$\underline{A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}} \quad \text{と表せる。}$$

2つの集合の両方に属する要素全体の集合を**AとBの積集合**といい、**A $\cap$ B**で表す。³



すなわち、積集合の要素xは

$$\underline{A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}} \quad \text{と表せる。}$$

⁵ 経済学では、集合にアップバーをつけると「closure (閉包)」を意味してしまうことも多い。そこで、集合の右上に「c」をつける方法もある (補集合 complement の“c”)

⁶ 本章5.1にて3つ以上の集合があった一般的な場合について考える。

2. 論理記号, 規則の説明

2. 1 必要条件・十分条件

命題「 P ならば Q 」を $P \Rightarrow Q$ と書き, 「 P または Q 」を $P \cup Q$,
「 P かつ Q 」を $P \cap Q$, P の否定を $\neg P$ と書く. また, 以下の説明において, 真
をT, 偽をFと書くことにする.

$P \Rightarrow Q$ がF, $Q \Rightarrow P$ がTのとき, 「 P は Q の必要条件である」といい,⁷
 $P \Rightarrow Q$ がT, $Q \Rightarrow P$ がFのとき, 「 P は Q の十分条件である」という.⁸

また,

$P \Rightarrow Q$ がT, かつ $Q \Rightarrow P$ もTのとき, 「 P は Q の必要十分条件である」といい,

P と Q は同値 (equivalent, if and only if) であるともいう ($P \Leftrightarrow Q$).

必要条件か十分条件か判別しづらいという声を多々聞く. そういうときは,
「要素の方が多い方が少ない方に対して必要条件だ」と覚えておけば忘れずに
すむだろう. ベン図を書いて確かめてみて欲しい.

2. 2 逆・裏・対偶

$P \Rightarrow Q$ という命題 (TかFかわからない状態の議題) に対し,

$Q \Rightarrow P$ を命題の「逆」

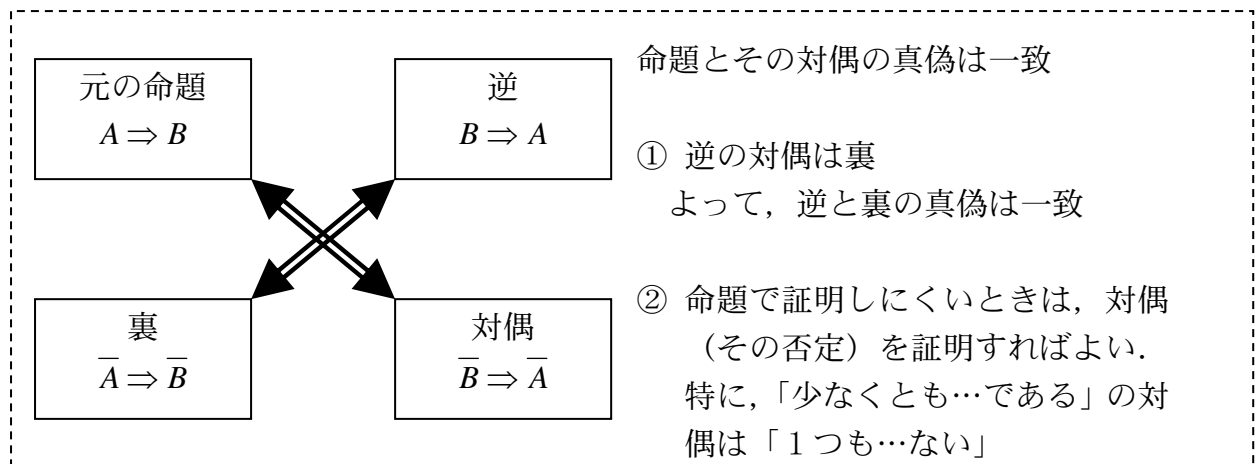
$\bar{P} \Rightarrow \bar{Q}$ を命題の「裏」

$\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ を命題の「対偶」

命題がTであれば, その対偶は必ずTとなるが, 逆, 裏が必ずTとは限らない.

⁷ “ P is necessary for Q ” $\Leftrightarrow$ “ $P \Leftarrow Q$ ” 必要条件のことを necessary condition という.

⁸ “ P is sufficient for Q ” $\Leftrightarrow$ “ $P \Rightarrow Q$ ” 必要条件のことを sufficient condition という.



2. 3 論理記号における計算

また、以下が論理記号の計算法則である。以下は覚えるものではなく、一つずつ、ベン図を用いて確認して欲しい。特に(7)の**ド・モルガンの法則**は重要である。ちなみに、() の名称は自体は知らなくて良い。

- (1) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (交換法則)
- (2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
(結合法則)
- (3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (分配法則)
- (4) $A \cap A = A$, $A \cup A = A$ (べき律法則)
- (5) $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$ (吸収律)
- (6) $A \cap U = A$, $A \cup U = U$, $A \cap \phi = \phi$, $A \cup \phi = A$
- (7) $\boxed{A \cap B = \overline{A \cup B}, A \cup B = \overline{A \cap B}}$ (ド・モルガンの法則)

2. 4 背理法

ある命題 $P \Rightarrow Q$ において、一般に **P を仮定**、**Q を結論** とするが、この仮定から結論を導く(証明)方法には、直接証明法(仮定から推論を進め、結論を導く方法)のほかに、**背理法**と呼ばれるものがある。ここでは背理法について少し学んで頂きたい。

背理法とは、**命題の結論が偽だと仮定し、矛盾を導き、命題が真である事を示す方法の事**である。実際に考えてみよう。

例) $\sqrt{2}$ は無理数であることを証明せよ。

証明 $\sqrt{2}$ が無理数でない、すなわち有理数であるとする、

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad \dots \textcircled{1}$$

但し、 $p, q \in \mathbb{Z}$ 、互いに素(**1 以外の公約数を持たない**) $\dots \textcircled{2}$

で表される。これらは有理数の定義である。

①の両辺を2乗し移項すると、 $q^2 = 2p^2 \quad \dots \textcircled{3}$

$2p^2$ は偶数であるから、左辺の q^2 も偶数、よって、 q は偶数である。
したがって、 $q = 2n$ ($n > 0, n \in \mathbb{Z}$) とおける。

③に代入すると、 $p^2 = 2n^2$ が導かれ、

p^2 は偶数で、 p も偶数である。

よって、 p, q がともに偶数で、公約数2を持ち、

②に反する。したがって、 $\sqrt{2}$ は有理数でなく、無理数である。(Q.E.D.)⁹

練習 以上のように $\sqrt{3}$ で確かめて欲しい。

⁹ 「Q.E.D.」とは「証明終」のこと。

3. 直積集合

本稿では集合を表記する際によく使用される直積集合について取り扱う。そこで、直積集合を説明するために、順序対・非順序対といった概念を説明しなければならない。但し、順序対・非順序対は覚えなくてもよく、忘れてもいい。

3. 1 順序対と非順序対

ある集合をあらわすとき、 $A = \{1, 2\}$ のように $\{ \}$ という記号を使う。一方で、2次元のグラフを思い浮かべたとき、その座標は、 $(x, y) = (1, 2)$ という風にあらわされる。 $\{ \}$ で表される2つの数字の対と $()$ で表される2つの数字の対と何が異なるのであろうか。まず、 $\{ \}$ で表される2つの数字の対について考える。ここで、 $B = \{2, 1\}$ という集合が与えられると、集合の定義より $A = B$ である。これは、集合 A の要素と集合 B の要素は同じであることを意味する。つまり、集合をあらわす際に $\{ \}$ 内の数字の順序はどのような順序でも同じ集合をあらわす。このような数字の対を非順序対という。一方で、座標は $(1, 2) \neq (2, 1)$ である。つまり、 $()$ で表される2つの数字の対の順序には、意味がある。このように、 $()$ 内の数字の順序に意味がある2つの数字の対を順序対という。

3. 2 直積集合とは

定義：二つの集合 A と B に対して、

$$\{x \mid x = (a, b), \ a \in A, b \in B\}$$

を A と B の直積集合といい

$\boxed{A \times B}$ で表す。 $A \times A$ は A^2 とも書く。

つまり、集合 A 、集合 B が数の集合であるのに対し、直積集合 $A \times B$ は、集合 A から第1要素、集合 B から第2要素をとって作られる全ての順序対の集合であるといえる。

例：2つの集合 $A = \{1, 2\}, B = \{3, 4\}$ が与えられたとき、 $A \times B$ はどのような集合になるのであろうか。結論から言うと、 $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$ となる。こ

れは、集合 A から第 1 要素、集合 B から第 2 要素をとって作ることができる全ての順序対の集合である。

4. ベクトルの大小関係を表すにはどうすればよい？ ¹⁰

普通の数的大小関係は、 $2 > 1$ といった風に不等号で順序をつけることができる。また、ベクトルにおいても、 $4 > 3$ かつ $3 > 2$ より、例えば $(4,3) > (3,2)$ と不等号で表すことができる。しかし、 $(1,2)$ と $(2,1)$ はすぐには比較ができない。

結論からいえば、こうした場合に比較において一定の尺度（以下の $z = f(x, y)$ や $f(x, y) = 2x + y$ など）を入れなければいけない。こういった尺度によって測られた順序を選好と呼び、“ $\prec$ ”や“ $\succ$ ”という記号を使う。この記号はベクトルを用いて、そのベクトルの状態がいい状態か悪い状態かの関係を表すのに使用する。

（例）ある 2 変数関数 $f(x, y) = 2x + y$ があるとし、 $z = f(x, y)$ とする。 xy 平面上のある 3 点の座標を $\mathbf{a} = (1, 2), \mathbf{b} = (2, 1), \mathbf{c} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ のようにして、ベクトルであらわす。このとき、 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の点をとったそれぞれの z の値を z_A, z_B, z_C とする。ここでは、 z の値が大きければ大きいほど、「良い」状態 と仮定する。

そこで、

$$z_A = 2 \cdot 1 + 2 = 4$$

$$z_B = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

$$z_C = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4.5$$

この z_A, z_B, z_C （**数値**）の大小関係を、不等号を用いてあらわすと、 $z_A < z_C < z_B$ とあらわすことができる。

そこで、 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ というベクトルに順序を付けたい。 z の値が大きければ大きいほど、「良い」状態 なので、 $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}$ の順番に良い状態である。このときに“ $\prec$ ”や“ $\succ$ ”の記号を使って、この順序を表すことができる。この記号を用いて表すと、

$$\underline{\mathbf{b} \succ \mathbf{c} \succ \mathbf{a}} \quad \text{または} \quad \underline{\mathbf{a} \prec \mathbf{c} \prec \mathbf{b}}$$

¹⁰ ここでは、ベクトルを「値の組み合わせ」と考える。ベクトルについて、よく分からないものは、11 章および 12 章を参照せよ。

5. 経済数学（経済学）で使用するその他の記号・論理・概念

5. 1 記号

● $\forall$...

for any..., *for all...*の A を逆さにしたものと考えられる.

(使用例 1) $\forall x, A$

「全ての x (任意の x) において, 命題 A が成り立つ」ということを示す.

(使用例 2) $\forall x \in R, x^2 + x + 1 > 0$

「実数 (R) である全ての x において, $x^2 + x + 1 > 0$ が成り立つ」ということを示す.

(使用例 3) $\forall Q \in R_+, \frac{d^2}{dQ^2} \pi(Q) < 0$

「正 (+) の実数 (R) である全ての Q において, $\frac{d^2}{dQ^2} \pi(Q) < 0$ (利潤最大化の 2 階の条件¹¹⁾ が成り立つ」ということを示す.

● $\exists$...

*there exists...*の E を逆さにしたものと考えられる.

(使用例 1) $\exists x, A$

「ある x (少なくとも一つ x) において, 命題 A が成り立つ」または「命題 A を成り立たせる x が (少なくとも 1 つ) 存在する」ということを示す.

(使用例 2) $\exists x, x + 1 = 2x$

「ある x (少なくとも一つ x) において, $x + 1 = 2x$ が成り立つ」または「 $x + 1 = 2x$ を成り立たせる x が (少なくとも 1 つ) 存在する」ということを示す.

¹¹ 効用や利潤を最大化させるために必要な 1 回微分で求められる条件を 1 階の条件 **first order condition** (FOC), その 1 階の条件を成立させるために必要な 2 回微分で求められる条件を 2 階の条件 **second order condition** という. (2 回微分や微分そのものについては, 本書)

(使用例 3) $\exists X \in R_+, \frac{d}{dX}U(X)=0$

「正 (+) の実数 (R) である少なくとも一つの X において, $\frac{d}{dX}U(X)=0$ (効用最大化の 1 階の条件) が成り立つ」 ということを示す.

• $\sum$

日本語の「合計」のことを英語で **Summation** というが, ラテン文字の S はもともと, ギリシア文字 Σ であった. 数学で Σ は **Summation** を表す.

使い方: 数列¹² $\{a_k\}_{k=1}^n$ ¹³において, 各項の和を $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$ と表す.

Σ の上に末項, 下に初項の数を, 項数を一般的に表す文字と = で結び, 表示する.

$\nabla \sum_{k \in X} a_k$ と表される場合がある. これは, 集合 X に含まれる全ての k について,

a_k を足し合わせることを意味している. 以下, $\Pi, \cup, \cap$ においても同様である.

• Π

使い方: 数列 $\{a_k\}_{k=1}^n$ において, 各項の積を $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = \prod_{k=1}^n a_k$ と表す. Π の上と

下の表記は Σ と同様である. 数列だけでなく, (直積) 集合などにも使用できる.

(使用例) $\log \prod_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \log a_k$ ¹⁴

¹² 数列のことを英語で **sequence** という.

¹³ $\{a_k\}_{k=1}^n$ は数列の集合を表し, $\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$ をまとめたもの. 右上に末項, 右下に初項の数を, 項数を一般的に表す文字と = で結び, 表示する.

¹⁴ $\log$ についてよく分からない者は, 9 章および 10 章を参照せよ.

• $\cap$

使い方：集合の列 $\{A_k\}_{k=1}^n$ ¹⁵において，各集合の積集合を $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n =$

$\bigcap_{k=1}^n A_k$ と表す． $\cap$ の上と下の表記は Σ と同様である．

• $\cup$

使い方：集合の列 $\{A_k\}_{k=1}^n$ において，各集合の和集合を $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n =$

$\bigcup_{k=1}^n A_k$ と表す． $\cup$ の上と下の表記は Σ と同様である．

以上の他にも，5項の前に取り上げた記号について，注釈も含めて，よく復習しておくこと．

• $\max, \arg \max$ ($\min, \arg \min$)

$\max$ は maximum (最大) の略と思われる．

使い方：関数 $f: K^m \rightarrow K^n$ である $Y = f(X)$ ¹⁶ の X を調整して得られる最大値を $Y^* = \max_X f(X)$ ¹⁷ と表す．最大化させた X を X^* とすれば， $X^* = \arg \max_X f(X)$ と

表せる．つまり， $\max$ は基本的に従属変数の最大値， $\arg \max$ はそのときの（内生的な）独立変数の値を意味しているといえる．¹⁸ 最小については，同様に $\min$ および $\arg \min$ を使用する．

(例) $\max_x \{x^2 - 2x\}, \arg \max_x \{x^2 - 2x\}$ を求めよ．

$x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ ．よって，図示すれば，明らかに， $\max -1, \arg \max 1$ ．

▽例えば， $\max \{a, b\}$ は，「集合 $\{a, b\}$ の中で，最大のもの」を意味する．

¹⁵ このように， $\{ \}$ の記号は，単に数列だけで使用するのではない．

¹⁶ つまり $X \in K^m, Y \in K^n$ である．

¹⁷ このように最大化や最小化の問題の対象となる関数を目的関数 (object function) という．

¹⁸ 関数については，2章を参照せよ．

5. 2 概念

● 开区間

使い方：开区間 (open interval) (a,b) とは a,b を含まない区間，すなわち， $a < x < b$ における x がとりうる範囲のことである． $\{x \mid a < x < b\}$ は 開集合 (open set) となる．¹⁹

(例) x は $1 < x < 2$ を満たす $\Leftrightarrow x \in (1, 2)$

● 閉区間

使い方：閉区間 $[a,b]$ (close interval) とは a,b を含む区間，すなわち， $a \leq x \leq b$ における x がとりうる範囲のことである． $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ は 閉集合 (close set) となる．²⁰

● 有界

有界 (bounded) とは，範囲が決まっていることをいう．有界な集合を有界集合 (bounded set) という．

(例 1) $\{x \mid 1 < x < 2\}$ や $\{x \mid -1000 \leq x \leq 1000\}$ は有界である．有界であるかどうかは，閉であるか開は問わない．

(例 2) $\{x \mid -1000 \leq x \leq \infty\}$ は有界な集合ではない．但し，下限の値には有界なので，下に有界 という． $\{x \mid \infty < x < 2\}$ は 上に有界 となる．

(例 3) 実数全体の集合： $R^n (\forall n \in N)$ は有界ではない．

¹⁹ このように，開集合 (open set) とは，その境界上にある点を自分自身にはまったく含まない集合のことをいう．

²⁰ このように，閉集合 (close set) とは，その境界上にある点を自分自身に含む集合のことをいう．

● コンパクト集合

コンパクト集合 (compact set) とは, 有界かつ閉な集合のことを指す.

● 不動点

不動点 (fixed point) とは, 関数 $Y = f(X) (X, Y \in K^n, \forall n \in N)$ において, $Y = X$ となり $X = f(X)$ を満たす組み合わせである, $(X, f(X))$ を指す.^{21 22}

(例) 関数 $y = f(x) (x, y \in R)$ において $f(x) = x^2$ とする. 不動点は,
 $x = f(x) \Leftrightarrow x = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x = x(x-1) = 0$ より $x = 0, 1$ なので, $(0,0), (1,1)$ である.

以上や 5 項の前に取り上げたものの他にも, 凸集合 (convex set), 凹集合 (concave set) などが重要な概念である. これらについては, 尾山, 武岡他 (2008)『経済学で出る数学—高校数学からきちんと攻める』日本評論社, などで, 各自で学習しておくこと.

²¹ 関数については 2 章を参考にすること.

²² $(X, f(X))$ の次元 (dimension) は 2 や n ではなく, $(X, f(X)) \in K^{n \times 2}$ となる. 次元については, 2 章や 11 章および 12 章を参照せよ.

5. 3 論理学の初歩

● 命題の真偽

本項では、2. 1 取り扱った、十分条件・必要条件・必要十分条件について、再確認する。2. 1 では、あくまでも十分条件・必要条件が問われている命題自体の真偽を判定したが、ここでは、真偽がすでに判定された命題間に成立する十分性や必要性を考えたい。例えば、命題 A と B の関係を考えよう。そもそも「 $A \Rightarrow B$ 」は、「 A ならば、 B 」ということだが、 A が偽で、 B が真であるとしよう。その場合、 A が偽なので、偽のものから真のものが導けるわけがないと思うかもしれないが、実は成立し、 $A \Rightarrow B$ とかける。つまり、偽である命題 A は、命題 B によつての十分条件となるのである。なぜ、そういうことになるのかというと、そうした方が論理を扱う上で都合が良いからである。以下は、このような関係を表したものである。

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Leftrightarrow B$
真	真	成立	成立	成立
真	偽	不成立	成立	不成立
偽	真	成立	不成立	不成立
偽	偽	成立	成立	成立

つまり、真の命題を T 、偽の命題を F とすれば、

$$\underline{F \Rightarrow T, T \Leftrightarrow T, F \Leftrightarrow F}$$

となる。詳しくは、神谷和也、浦井憲(1996)『経済学のための数学入門』東京大学出版会の1章を参照せよ。

● 定義・仮定・補題・公理・系・定理の関係

本項では、経済学理論を学習し構築する際に、必要な基本的な論理学的概念を説明する。なお、例自体を必ずしも理解する必要はない。

* 定義 (definition) とは、新たな概念や言葉を使用する際に説明しなければならない、その意味への主張である。

(例1) Q を生産量とする。

(例2) 同じ効用が得られる消費財の組み合わせを結んだ曲線が無差別曲線とする。

* 仮定 (Assumption) とは、何かの理論 (以下の系・公理・定理) を導くために設定される、真偽が不明な命題のことである。

(例 1) みかん市場は完全競争市場とする。(つまり、価格 P を一定の定数とする。)

(例 2) 消費者は合理的だとする。(例えば、市場で一番安いものを購入するとする。)

(例 3) 企業は自らの利潤の最大化を目指すとする。

(例 4) 生産要素を資本と労働力の 2 つとする。

* 定理 (Theorem, Proposition) とは、仮定や定義、その他の命題から証明された真である命題のことである。

(例 1) 完全競争市場では総余剰は最大となる。

(例 2) (ブラウワーの不動点定理²³) $X \subset R^n$ が空ではなく、コンパクトかつ凸であり、 $f: X \rightarrow X$ が連続であれば、 f は少なくとも 1 つの不動点を持つ。

(例 3) ベイズの定理 → 13章を参照せよ。

* 補題 (Lemma) とは、ある定理を導くために証明された真なる命題のことである。つまり、定理の一種といえる。

* 系 (corollary) とは、ある定理から直ちに導かれる定理のこと。

* 公理 (axiom) とは、別の命題を導きだすための前提として導入される最も基本的な仮定のことである。仮定の中でも、より自明で、証明されてはいないが真と考えられていることを指している。

(例 1) 命題 P が成立するなら、命題「 P または Q 」も成立する。

(例 2) $a=b$ なら、 $a+c=b+c$ である (ユークリッドの公理²⁴の一つ)。

(例 3) コルモゴロフの公理²⁵ → 13章を参照せよ。

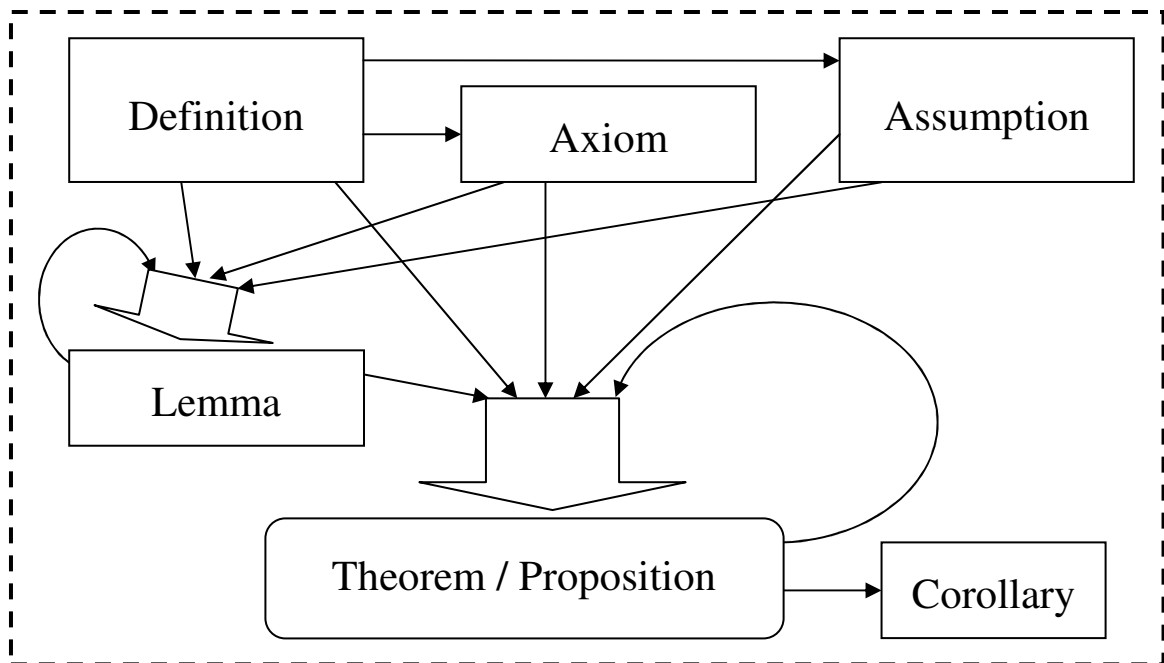
(例 4) 空集合が存在する (公理的集合論)。

これら、定義・仮定・補題・公理・系・定理の関係を示したものが、次の図である。

²³ Brouwer fixed point theorem

²⁴ Euclid axioms

²⁵ Kolmogorov axioms



但し，これらの話は抽象的な議論を聞いてもよく分からないので，実際に学習を進めていく中で，理解していけば良いと思われる．

2 関数についての基礎知識 (河野・我妻)

関数は、経済学で非常に頻繁に使用されるツールの一つである。深く幅広く理解しておくことが望まれる。

＝目次＝

1. 関数と比例

I 関数	22
II 変域・定義域・値域	22
III 不等号などの記号について	23
IV 比例	23

2. 座標・比例のグラフ

I 座標	24
II 対称な点の座標	25
III 点の移動	25
IV 幾何	25
V 比例のグラフ	26

3. 反比例

I 反比例	27
II 反比例のグラフ	27

4. 比例・反比例の利用

I その他のグラフ	29
II 変数の関係	29
III グラフの利用	29

5. 関数の移動と 1 次関数

6. 内生変数と外生変数

1. 関数と比例²⁶

I 関数

▽とある集合AとBがあり，Aの各要素 x に，一定の規則 f によってBの各1要素 y がそれぞれ対応づけられるとき， f をAからBへの写像と呼び，これを“ $f: A \rightarrow B$ ”と書き表す．そこで，数の集合Aから数の集合Bへの写像 $y = f(x)$ のことを関数と定義される．簡潔に言えば，以下になる．

▼変数 x ， y があつて， x のおおのの値に対応して y の値がただひとつ決まるとき， y は x の関数であるという．

▽関数の表し方は次の4通りある．

(1) 式 (2) 矢印と言葉 (3) 表 (4) グラフ

・・・(1)，(4)が一般的である．

II 変域・定義域・値域

▽関数 $y = f(x)$ において， x と y はともに変数であるが， x に相当するものを独立変数 (independent variable)， y に相当するものを従属変数 (dependent variable) という．それぞれが複数あることもあり，例えば， z が従属変数で， x と y が独立変数ならば， $z = f(x, y)$ (2次元から1次元に対応する関数) と書く．

▽独立変数のとりうる値の範囲をこの関数の定義域 (domain) といい，これに対応して定まる従属変数の値の範囲をこの関数の値域 (range) という．関数の問題に関わらず，変数の取りうる範囲のことを変域という．

▽関数が m 次元の実数から n 次元の実数に対応する場合，関数の定義の際に，

$f: R^m \rightarrow R^n$ などと表す．例えば， $z = g(x, y)$ は， $g: R^2 \rightarrow R$ である．²⁷

²⁶ 関数を英語で function という．

²⁷ 次元については 11 章 12 章のベクトルを参照せよ．

Ⅲ 不等号などの記号について

(例) $5 > 2$, $7 \leq 7$, $c \neq 0$

▽ “ $>$ ”, “ $<$ ” . . . 「より大きい」, 「より小さい」状態を表す. その数自体は含まず, 数直線上や座標上でその値の箇所を小さい “ o ” で表す.

▽ “ $\geq$ ”, “ $\leq$ ” . . . 「以上」, 「以下」の状態を表す. その数自体含み, 数直線状や座標上でその値の箇所を小さい “ $\bullet$ ” で表す.

▽ “ $\neq$ ” . . . その値でない状態. 等しくない状態.

▽ これらは, 変域・定義域・値域を表す際に用いる.

(例) $y = 2x$ ($-5 \leq x < 4$)

▽ “ $(\quad , \quad)$ ” . . . 値を表すときに用いる.

(例) $x = 1, y = -4 \Leftrightarrow (x, y) = (1, -4)$

cf: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ と書いてもよい.

Ⅳ 比例

▽ 関数 $y = f(x)$ が $y = \square x$ のような式であるとき, y は x に **比例** するといい, $\square$ の値を **比例定数 (=傾き)** という. 比例定数は a とおくのが一般的であるようだ. また比例定数は 0 でない.

▽ このとき比例定数は, $x=1$ のときの y の値に等しい.

▽ 必ず $(x, y) = (0, 0)$ をみたす.

▽ y は x に比例するとき, x の値が 2 倍, 3 倍, になればなるほど, それに対応する y の値も 2 倍, 3 倍, となる.

▽ $y = ax$ において, $(x, y) = (x_0, y_0), (x_1, y_1)$ を満たすとする, $a =$

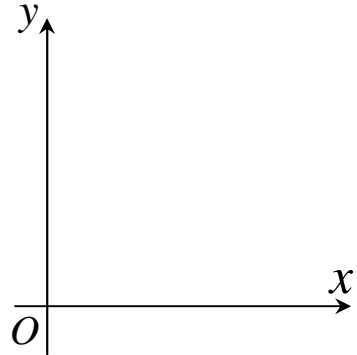
$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ で求めることが出来る.

2. 座標・比例のグラフ

I 座標

(1) 座標平面

...右図のような, 2 本の数直線 (矢印が必要) が両方の原点で交わっている図. 一般に, 垂直に交わる.



▽ x の値を表す数直線のことを「 x 軸」と呼び, 一般に横軸で表す.

▽ y の値を表す数直線のことを「 y 軸」と呼び, 一般に縦軸で表す.

▽ x 軸, y 軸あわせて座標軸, その交点を 原点 O (オー) と呼ぶ.

(※「0」(ゼロ) ではない.)

▽ 以上 3 つは座標平面を書く上で必ず書かなくてはならない.

(2) 座標

▽ (例) $x = 4$, $y = 3$ を意味する点 P を, $P(4, 3)$ のように書く. このとき, x の値を x 座標, y の値を y 座標と呼ぶ.

▽ $x y$ 座標平面にて,

1. $x > 0$ かつ $y > 0$ の部分・・・第 1 象限
2. $x < 0$ かつ $y > 0$ の部分・・・第 2 象限
3. $x < 0$ かつ $y < 0$ の部分・・・第 3 象限
4. $x > 0$ かつ $y < 0$ の部分・・・第 4 象限

←反時計回り順. 座標軸上は含まない.

☆横軸が x 軸, 縦軸が y 軸により描かれた座標平面を,

「 $x y$ 座標平面」または「 $x y$ 平面」と呼ぶ.²⁸

²⁸ もし, 縦軸 x で横軸 y なら, 「 yx 平面」になる. 三次元で, z が従属変数で, x と y が独立変数ならば, 「 xyz 空間」もしくは「 yxz 空間」となる (どちらでもいいが通常は前者).

Ⅱ 対称な点の座標

(例) (a, b) に対して

(1) x 軸について対称 (線対称) な点は $(a, -b)$
... y 座標の符号が変わる.

(2) y 軸について対称 (線対称) な点は $(-a, b)$
... x 座標の符号が変わる.

(3) 原点について対称 (点対称) な点は $(-a, -b)$
... 両座標の符号が変わる.

Ⅲ 点の移動

点 $A(x, y)$ を x 軸方向に a , y 軸方向に b 移動させた点 B は,
 $B(x+a, y+b)$ と表すことができる.

Ⅳ 幾何

(1) 中点の座標

2 点 $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$ のちょうど中間点の座標は, $\left(\frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{y_0 + y_1}{2}\right)$
で求まる. 値が負でも気にしなくてよい.

(2) 座標平面上の面積の求め方

☆単位は要らない. 考えない.

①図形の内部を分割し, 分割された部分の面積を求める.

②求める図形を取り囲む部分の面積を求め, 余分な部分の面積を取り除く.

③その他

三角形において

イ) $\triangle OAB$ において, $O(0,0)$, $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ とすると,

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} |a_1 b_2 - a_2 b_1| \quad \text{で求めることが出来る.}$$

(“ $| \quad |$ ”は絶対値記号.)

ロ) $\triangle ABC$ において, $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$ とすると,

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} |(a_1 - c_1)(b_2 - c_2) - (a_2 - c_2)(b_1 - c_1)| \quad \text{で求めることが出来る.}$$

V 比例のグラフ

(1) 比例のグラフ: $y = ax$ ($a \neq 0$) のグラフは, 原点を通る直線となる.

(2) 比例のグラフの特徴

1. 傾き: $a > 0$ のとき

…右上がりの直線となり, x が増加すると y も増加する.

2. 傾き: $a < 0$ のとき

…右下がりの直線となり, x が増加すると y は減少する.

(3) 比例のグラフの書き方

…直線は2点によって決定するから, 座標平面状の2点を書き, それを通る直線を引く. 一般に, 原点ともう一点が分ればよい.

(4) 補足

・直角に交わる2つの一次関数の傾きの積は-1のなる.

- ・変域が設定されていたら実線でその部分を表し，破線で延長する．
(境界の点を明確にする.)

3. 反比例

I 反比例

(1) 反比例

… 2 つの変数 x ， y の間に，定数 a ($a \neq 0$) を用いて， $y = \frac{a}{x}$ や $xy = a$ といった関係があるとき， y は x に反比例するという． a を比例定数といい，これは x と y の積であり一定である．

(2) 反比例の性質

… y が x に反比例するとき， x の値が 2 倍，3 倍， $\dots\dots$ となれば，それに対応する y のあたいは $\frac{1}{2}$ 倍， $\frac{1}{3}$ 倍， $\dots\dots$ となる．

II 反比例のグラフ

(1) 反比例のグラフ

$y = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$) のグラフは，原点に点対称な一組の滑らかな曲線となる．
これを双曲線という．

(2) 特徴

1. 傾き： $a > 0$ のとき・・・グラフは第 1 象限と第 3 象限にあり， x が増加すると y は減少する．

2. 傾き： $a < 0$ のとき・・・グラフは第 2 象限と第 4 象限にあり， x が増加すると y も増加する．

3. $y = \frac{a}{x}$ のグラフでは， x 軸， y 軸と交わることはない．

グラフは x 軸， y 軸に限りなく近づいていく．（それぞれの軸が漸近線）

(3) 反比例のグラフの書き方

- ・ 関数を満たす，任意に数を代入することで座標をいくつか求め，滑らかな曲線で結ぶ．
- ・ 変域が設定されていたら実線でその部分を表し，破線で延長する．（境界の点を明確にする．）

(次のページへ)

4. 比例・反比例の利用

I その他のグラフ

(1) $y = b$ のグラフ

… $(0, b)$ を通り, x 軸に平行な直線となる.

☆グラフの線と y 軸の交点を y 切片という.

(2) $x = a$ のグラフ

… $(a, 0)$ を通り, y 軸に平行な直線となる.

II 変数の関係

変数 V , p , T ($T \neq 0$) と定数 a によって表された式 $\frac{Vp}{T} = a$ について.

(1) 移項により $Vp = aT$ と表すことができる.

(2) 定数 V_0 ($V_0 \neq 0$) により $V = V_0$ ならば,

$V_0 p = aT$ より $p = \frac{a}{V_0} T$, $\frac{a}{V_0}$ が定数から, p と T は比例関係にある.

(3) 定数 p_0 ($p_0 \neq 0$) により $p = p_0$ ならば,

$V p_0 = aT$ より $V = \frac{a}{p_0} T$, $\frac{a}{p_0}$ が定数から, V と T は比例関係にある.

(4) 定数 T_0 により $T = T_0$ ならば, $Vp = aT_0$ より $Vp = aT_0$, aT_0 が定数から, V と p は反比例関係にある.

III グラフの利用

比例についての問題を, グラフに表すと分かりやすいことがある.

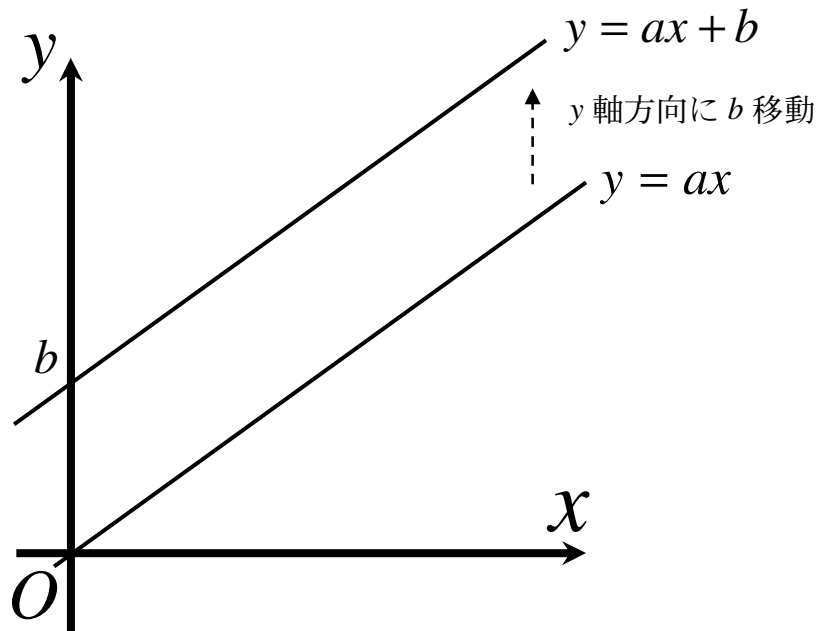
5. 関数の移動と1次関数

- 関数 $y = f(x)$ を, xy 平面において, x 軸方向に p , y 軸方向に q 移動させたら, 移動後のグラフは,

$$\boxed{y - q = f(x - p) \Leftrightarrow y = f(x - p) + q}$$

となる.

- 上を比例の式 $y = ax$ に適用しよう. 仮に, y 軸方向に b 移動したとすると, 移動後は, $y = ax + b$ となる. この様子を図示したものが以下である.



- 上図より, このとき明らかに, y 軸との交点の y 座標が b であることがわかる. $y = ax + b$ の定数項がまさにこれにあたり, 全ての関数において, 右辺の定数項は必ず, 縦軸との交点の値を示す. y 軸との交点を y 切片という. 同様に, x 軸との交点は, x 切片という. 今回のケースでは, x 切片の値を求めるには, $y=0$ を関数の方程式に代入し, x の値を求めればよい.

6. 内生変数・外生変数

4 のⅡの「変数の関係」で取り上げた $\frac{Vp}{T} = a$ ²⁹ は、有名な基本的物理学法則の一つである。これを用いて、経済学でも極めて重要な概念である内生変数 (endogeneous variable) と外生変数 (exogeneous variable) について説明する。

とある気体を、自在に伸び縮みする密閉した容器³⁰に閉じ込めることを考える。つまり、質量不変の法則によって、以下において気体の質量³¹は一定となる。体積、圧力、絶対温度 ($T \neq 0$) をそれぞれ変数 $V, p, T \in \mathbb{R}_+$ とする。定数 a を用いて、 $\frac{Vp}{T} = a$ が成立することが知られている。 V, p, T は本来、変数なので、値を正の実数の範囲で自在に動かすことができる。

そこで、2つの変数だけに着目して、その関係を考えるとしよう。 V, T の関係を考える。 $Vp = aT$ より $V = \frac{a}{p}T$ 。よって、体積と温度は比例関係にあり、気体の温度が高まれば高まるほど、体積も大きくなるといえる。これをシャルルの法則というが、これに限らず理論の式において、関係を分析する対象となっている変数を内生変数という。変数のうち、内生変数でないものは外生変数である。つまり、シャルルの法則においては、 V, T が前者であり、 p が後者となる。 y 。 a は定数なので、どちらでもない。

今度は、 V, p の関係を考えたい。 $Vp = aT$ より V と p は反比例関係にあるといえる。³² 当然、 V, p が内生変数で、 T が外生変数となる。

この内生変数と外生変数は、独立変数と従属変数と全く異なる概念なので、混同しないこと。

²⁹ ボイル・シャルルの法則という

³⁰ ものすごくやわらかいビニール袋のようなものを考えよ。

³¹ 質量とは、普遍的な重さのことである。重量は、重さを測る場所によって大きく変わってしまう。例えば、月は地球の8分の1くらいの重力しかないので、月で体重計に乗れば、地球で体重計に乗るよりも軽く表示される。

³² ボイルの法則という

3 極限（高橋・中村）

日本語でいうそれとは異なり、曖昧な意味を持つものではない。数学的な意味における「極限」を、正確に理解して欲しい。

1. 極限とは

高校1年次に学習した数列，ある数列の要素全体を $\{a_n\}$ と表した．この n に特定の制限が無いとき， n は限りなく大きくなっていく．つまり，項が限りなく続いていくのだ．このように項が限りなく続く数列を**無限数列**という．このような数列 $\{a_n\}$ において，項 a_n の値が**ある値 α に限りなく近づいていくとき**，その値 α の事をこの数列の極限(極限值)といい，この数列 $\{a_n\}$ は α に**収束**するという．

上記のことを記号で表すと，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \quad (\text{または } n \rightarrow \infty \text{ のとき, } a_n \rightarrow \alpha) \text{ となる.}$$

また， $\{a_n\}$ において， $n \rightarrow \infty$ としたとき，上記のようにならず，**①正の値が無限大になっていく，②負の値が無限大になっていく，③定まらない**，となるとき，

$$\textcircled{1} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad (\text{正の無限大に「発散」})$$

$$\textcircled{2} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \quad (\text{負の無限大に「発散」})$$

③数列 $\{a_n\}$ の極限は無い³³ と表記する．

収束する場合と，①，②のように発散する場合は「極限がある」が，
③にはそもそも「極限が無い」．

³³ 具体的には， $\lim_{n \rightarrow \infty} (-2)^n$ のケースがある．ちなみに，これは， n が偶数・奇数かによって，正負が逆転する．つまり， n が進むにつれて，値が大きくなったり小さくなったりする．このような場合を発散という．発散には， $\lim_{n \rightarrow \infty} (-2)^n$ のように極限值をとらない場合もあれば，

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ のように結局収束する場合もある．

2. 極限を用いた計算

以下，極限を用いた計算の公式である．

数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が収束し， $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ のとき，

$$(1) c \text{ が定数ならば, } \lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \alpha$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha \pm \beta \quad (\text{複合同順})$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha \beta$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n / b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n / \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha / \beta \quad (b_n \neq 0, \beta \neq 0) \text{ とする.}$$

いずれも，証明は割愛する．

3. 関数の極限

数列だけでなく，極限は関数にも汎用できる．

$X \rightarrow a$ のとき (x が a に限りなく近づくととき)， $f(x) \rightarrow b$ となれば，

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

とすることができる．しかし，関数の場合は数列と異なり， n を無限に大きくすればすむ話ではない． x をある値 a に限りなく近づけることによって， $f(x)$ の極限を見るのである．ここで，反比例のグラフを思い出して欲しい． x を同じ 0 に近づけるのでも，**正の側から近づけるのと，負の側から近づけるのとでは**， $y(f(x))$ の値が異なってくる．このような不連続な関数*の極限を考える際には，**右方極限**と**左方極限**という概念を学ばなければならない．

さて, a を定数とすると, 変数 x が $x > a$ ($x < a$) で, x が限りなく a に近づくことを, $x \rightarrow a+0$ ($x \rightarrow a-0$) と書く.

$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ と $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ の両方が存在するとき,

それぞれを関数 $f(x)$ の **右方極限**, **左方極限** という.

* 関数の連続性

→ 関数 $f(x)$ が, $x=a$ を含む区間**で定義されており, $x \rightarrow a$ のとき $f(x) \rightarrow f(a)$, すなわち

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ であるとき, $f(x)$ は $x=a$ で連続であるという.

要するに, $x=a$ 付近で, 反比例のグラフのように $f(x)$ のグラフが急にジャンプしたりはしないということである.

4. 無限等比級数の収束・発散

1. 無限数列³⁴ $\{a_n\}$ において、各項を前から順にたし合わせたもの

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

これを無限級数³⁵という。

2. 無限級数の第 n 部分和³⁶を第 n 項とする無限数列 $S_1, S_2, \cdots; S_n, \cdots$ が S に収束するとき、つまり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ であるとき、無限級数は S に収束するといひ、 S を無限級数の和という。無限数列 $S_1, S_2, \cdots; S_n, \cdots$ が発散するとき、無限級数は発散するという。

3. また、初項 a 、公比 r の無限等比数列 $\{ar^{n-1}\}$ から作られる無限等比級数

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

これを、初項 a 、公比 r の無限等比級数という。

4. 目的：無限等比級数の収束・発散条件を明らかにすること

初項 a 、公比 r 、項数 n の等比数列の和 S_n は、

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

無限等比級数とは項数 ∞ の等比数列の和 S_∞ なので、

$$S_\infty = \frac{a(1-r^\infty)}{1-r}$$

これを a と r について場合分けすると、

$a \neq 0$ のとき、 $|r| < 1$ ならば収束し、その和は $\frac{a}{1-r}$ である。

$|r| \geq 1$ ならば発散する。

$a = 0$ のとき、収束し、その和は 0 である。

³⁴ 項が限りなく続く数列のこと。

³⁵ ちなみに有限級数は通常、数列の和と呼ばれている。

³⁶ $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$

4 微分とその利用／グラフの描き方（河野）

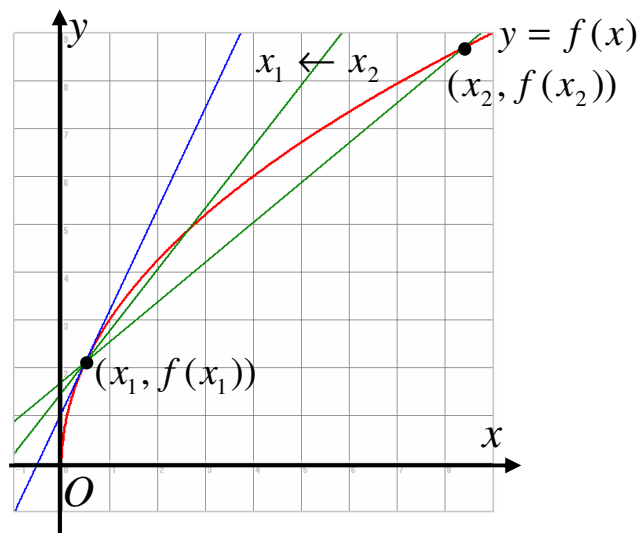
いわゆる高校の文系範囲の数学（数学ⅠAⅡB）では、比例・反比例・1次関数・2次関数・3次関数・円が描ければよいことになっている。これまではその度にグラフの描き方を学んできたが、実際には、関数・方程式の種類は無限に存在する。このままでは、全ての関数の描き方を実践できないので、もっと一般的に使用できる描き方が知る必要がある。そこで、今から紹介するものは、その一般的な方法の一部である。あくまでも「一部」であるので、自ずと限界が生ずる。だが、「どうすればいいのだろう...?」と途方に暮れたり、不安にかられたりするときには、一つの指針と希望を与えてくれるものになるであろう。

1. そもそも微分は何を意味するのか？

例えば、横の曲線： $y = f(x)$ 上の2点 $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ を通る直線の傾きを考える。

$$\text{この傾きは, } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

そこで、 x_2 をできる限り x_1 に近づける（ $x_2 \rightarrow x_1$ ）と、この直線は、 $(x_1, f(x_1))$ における $y = f(x)$ の接線になる。



つまり、この接線の傾きは、

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \text{ であり, } x_2 - x_1 = \Delta x \text{ (} x_2 = x_1 + \Delta x \text{)} \text{ となので,}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$\text{よって, } (x, f(x)) \text{ における } y = f(x) \text{ の接線の傾きは, } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

であり、これを $y = f(x)$ を微分した式（導関数）という。³⁷

³⁷ $R \rightarrow R$ の関数 $y = f(x)$ を x で微分したときの導関数の定義は、 $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

2. 微分の記号

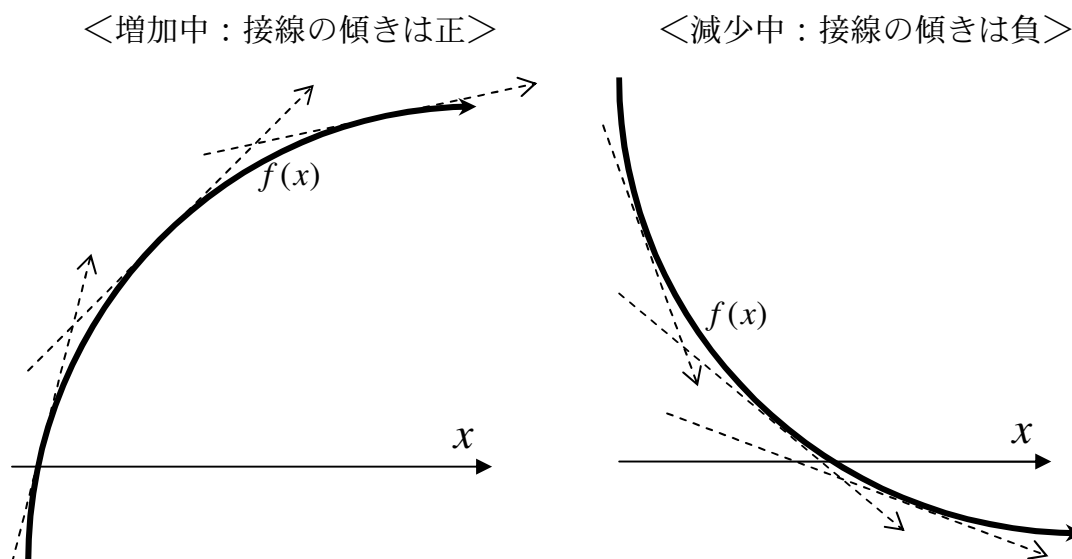
$f(x)$ の微分した式を, $\frac{d}{dx}f(x)$ や $\frac{df(x)}{dx}$, $f'(x)$, $f^1(x)$ と表す.

そこで, 例えば, $f(x) = ax^n$ に対して, $\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ を適用すると, $\frac{d}{dx}f(x) = anx^{n-1}$ となることが知られている. もし, 2 回微分すれば, $an(n-1)x^{n-2}$ となる.

このように, 何回も微分することは可能なため, 微分の回数を記号に表すことが必要な場合が出てくる. $f(x)$ を n 回微分したことを表す記号は, $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$ や $f^n(x)$ などである.

3. そもそも微分から何が分かるか？

1. でも見たように, 微分した値は, 接線の傾きを表す. まず, 1 回微分することで判明するこの値 $\frac{d}{dx}f(x)$ が, **正か負** であるかによって, その関数とその接線の接点において増加中か減少中か分かる.

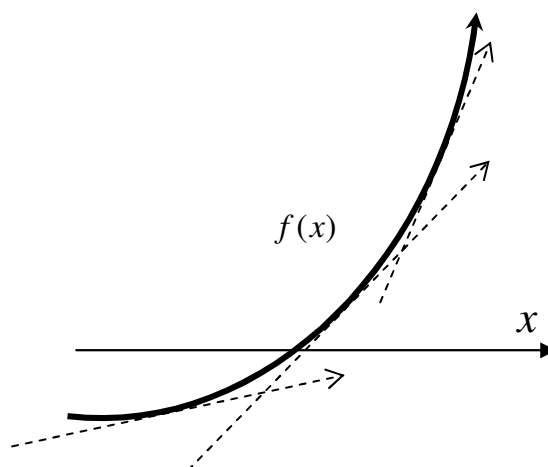
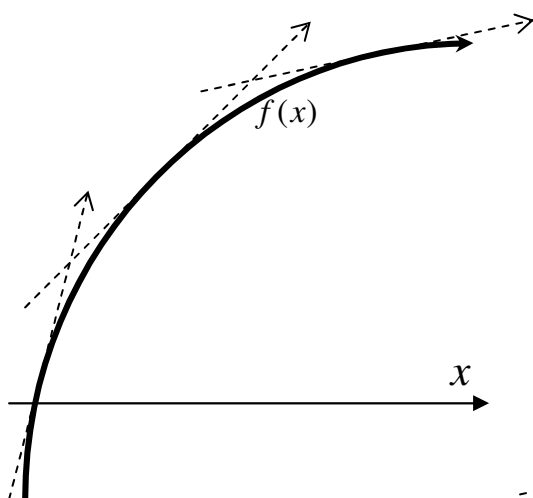


4. 2回微分によって分かること

3. でも分かったように、1回微分した値が正か負かによって、微分されたものが増加中か減少中かが判別できる。よって、傾き自体が（正のときであろうか負のときであろうか）増加しているか減少しているかを調べるには、傾きを表す $\frac{d}{dx}f(x)$ をもう一度微分した、すなわち $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$ の正負を調べればよいことになる。

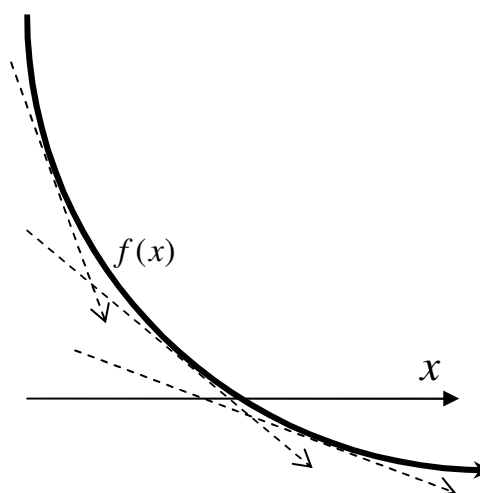
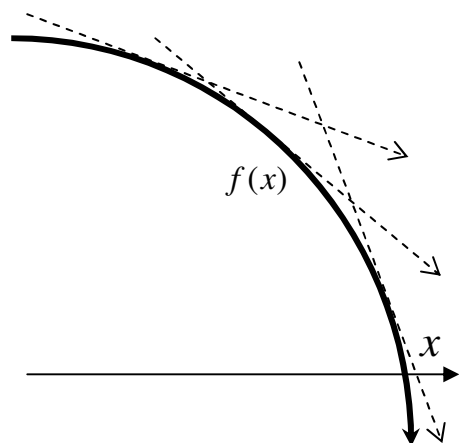
(1) 関数は増加中：接線は正

＜接線の傾きは減少中： $\frac{d^2}{dx^2}f(x) < 0$ ＞ ＜接線の傾きは増加中： $\frac{d^2}{dx^2}f(x) > 0$ ＞



(2) 関数は減少中

＜接線の傾きは減少中： $\frac{d^2}{dx^2}f(x) < 0$ ＞ ＜接線の傾きは増加中： $\frac{d^2}{dx^2}f(x) > 0$ ＞



まとめると,

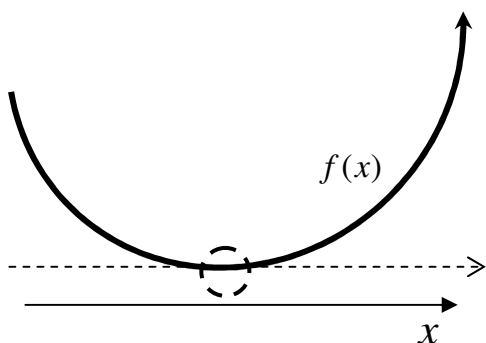
$\frac{d}{dx}f(x)$ が $+$ なら $\frac{d}{dx}f(x)$ が $-$ なら

$\frac{d^2}{dx^2}f(x)$	$+$	$-$
$\frac{d}{dx}f(x) \quad +$		
$\frac{d}{dx}f(x) \quad -$		

そこで, ちょっと変な場合を考える. まず, $\frac{d}{dx}f(x)$ が正でも負でもない, つまり 0 のときはどうなっているのだろうか. これは, 増加も減少もしていない, 接線の傾きが 0 の場合である.

次に, $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$ が 0 の場合はどうであろうか. 接線の傾きが増加も減少もしないということだから, 一定の傾きを保ち続けているということである. 具体的にこのように現象が見られる関数は 1 次関数である.

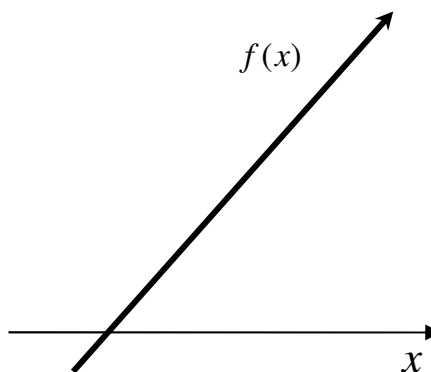
<底が $\frac{d}{dx}f(x) = 0$ >



※接線の傾きが 0

このような場合を「極値をとる」という

< $\frac{d^2}{dx^2}f(x) = 0$ の場合>



※接線の傾きが一定

このような場合を単調増加 (減少) という

5. 3次関数で実践する

(例) $f(x) = x^3 - x$ ($y = f(x)$)

まずは $\frac{d}{dx}f(x)$ を調べる. $\frac{d}{dx}f(x) = 3x^2 - 1$ より,

(1) $\frac{d}{dx}f(x) > 0 \therefore x > \frac{1}{\sqrt{3}}, x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき ↗

(2) $\frac{d}{dx}f(x) = 0 \therefore x = \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき 極値をとる

(3) $\frac{d}{dx}f(x) < 0 \therefore \frac{1}{\sqrt{3}} > x > -\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき ↘

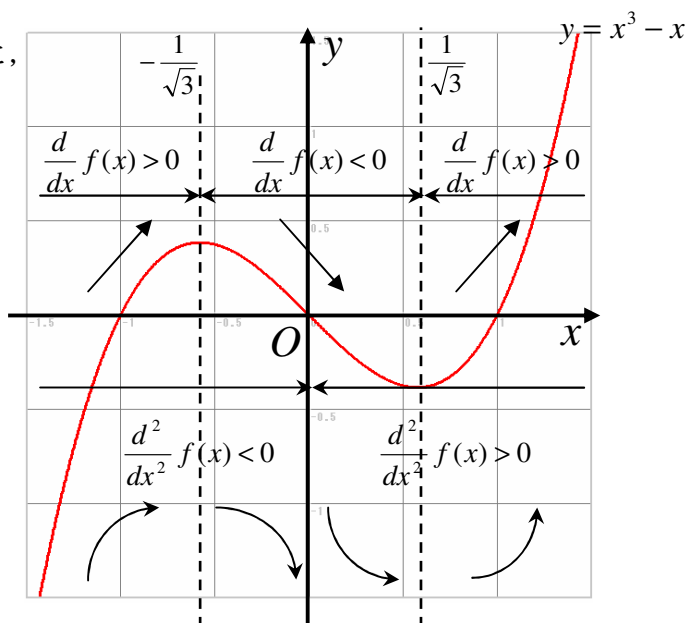
さらに, $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$ を調べる. $\frac{d^2}{dx^2}f(x) = 6x$ より,

(イ) $\frac{d^2}{dx^2}f(x) > 0 \therefore x > 0$ のとき ↗ または ↘

(ロ) $\frac{d^2}{dx^2}f(x) = 0 \therefore x = 0$ のとき (3) より, 単調増加

(ハ) $\frac{d^2}{dx^2}f(x) < 0 \therefore x < 0$ のとき ↘ または ↗

以上をまとめると,



5 線形計画法 (河野)

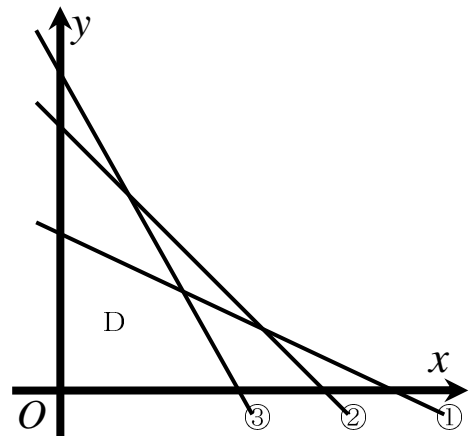
線形計画法は、ミクロ経済学でよく使う method のうちの一つである。具体的には、生産可能領域・境界を図示して、生産・消費の最適問題を考える際に使用する。他には、国際貿易論のリカード・モデルなどでも使用する。そこで、線形計画法の解法を実例を使って紹介する。

(例題) $x \geq 0, y \geq 0, x + 3y \leq 15, x + y \leq 8, 2x + y \leq 10$ のとき、
 $3x + 2y$ の最大値を求めよ。

(1) $x \geq 0, y \geq 0, x + 3y \leq 15, x + y \leq 8, 2x + y \leq 10$ を図示

$$\begin{cases} x + 3y \leq 15 \\ x + y \leq 8 \\ 2x + y \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -\frac{1}{3}x + 5 & \dots \textcircled{1} \\ y \leq -x + 8 & \dots \textcircled{2} \\ y \leq -2x + 10 & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

$x \geq 0, y \geq 0$ において、
 これらを図示すると、右図になる。
 求める範囲は、左図の D の部分。
 (境界も含む)



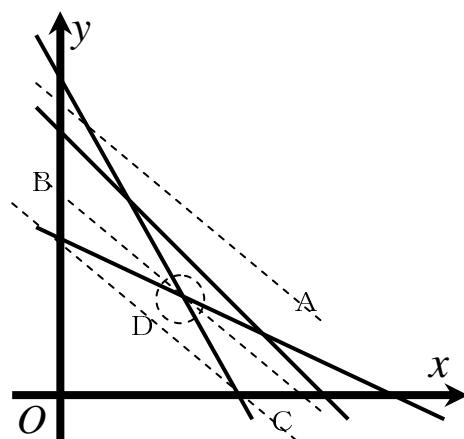
(2) $3x + 2y$ の最大値

図で分析するために $3x + 2y$ を方程式にする。 $3x + 2y = k \quad (k \in \mathfrak{R})$
 そうすれば、 $3x + 2y$ の最大値を求めるということは $3x + 2y$ の最大値を求める
 ということは、 k の最大値を求めるということと同じ。

$3x + 2y = k$ を描くと、 $y = -\frac{3}{2}x + \frac{k}{2}$ これを図に描くと、以下の通り.

$y = -\frac{3}{2}x + \frac{k}{2}$ の候補を破線で 3 つ描いた.

y 切片が $\frac{k}{2}$ なので、 k を最大にするには、
 y 切片ができるだけ大でなくてはならない。
 しかし、この直線は D に触れていなくては
 いけないので、B が k を最大にする。
 つまり、 $3x + 2y = k$ が $\bigcirc$ を通ればいい。
 $x + 3y = 15, 2x + y = 10$ の交点は、
 これを解くと $(3, 4)$ これを $3x + 2y = k$
 $9 + 8 = 17 = k$ よって、最大値 17.



6 微分可能性 (河野)

効用最大化や利潤最大化などの最適化問題を解く際に、よく微分（偏微分・全微分を含む）を行う。その際、例えば $\frac{d}{dx} ax^n = anx^{n-1}$ などの微分に関する公式を利用するが、本来はそれらを使用する前に、微分されるもの（上の例であれば ax^n ）がそもそも微分可能（differentiable）であるかどうかを確かめなくては行けない。本項では、⁽¹⁾どのようなものが微分可能であり、⁽²⁾その条件は何であるかを示したい。

＝目次＝

1. どのようなものが微分可能であるか？（直観的な説明）

- 1. 1 連続でない例・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 44
- 1. 2 なめらかでない例・・・・・・・・・・・・・・・・ 46
- 1. 3 二つの方程式から成り立つが、連続でなめらかである例・・ 47
- 1. 4 なめらかさの直観的な検証・・・・・・・・・・ 47

2. 微分可能条件（厳密な定義）

- 2. 1 微分の定義の復習と微分可能条件・・・・・・・・・・ 49
- 2. 2 厳密な微分可能条件と直観的な条件の整合性・・・・・・・・ 50

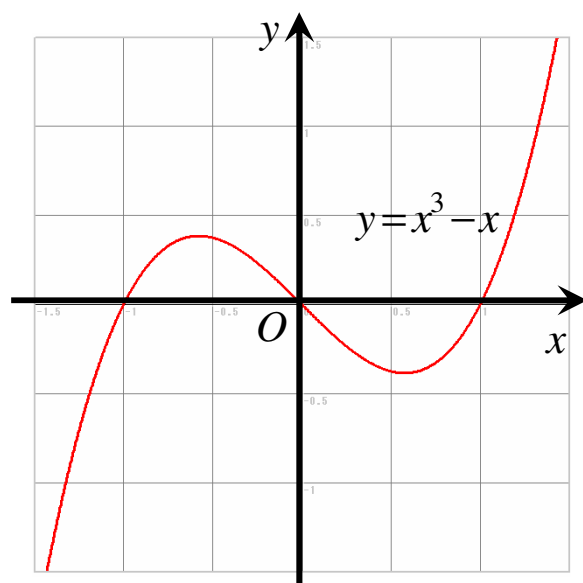
3. 微分可能性の検証・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 52

1. どのようなものが微分可能であるか？（直観的な説明）

ある点（またはある区間で）微分可能であるということは、簡単にいえば、その点（またはその区間で）次の二つが生じていればよい。

- (1) 連続である（グラフがその点において途切れていない）。
- (2) 滑らかである（突然、傾きが急激に変化したりしない）。

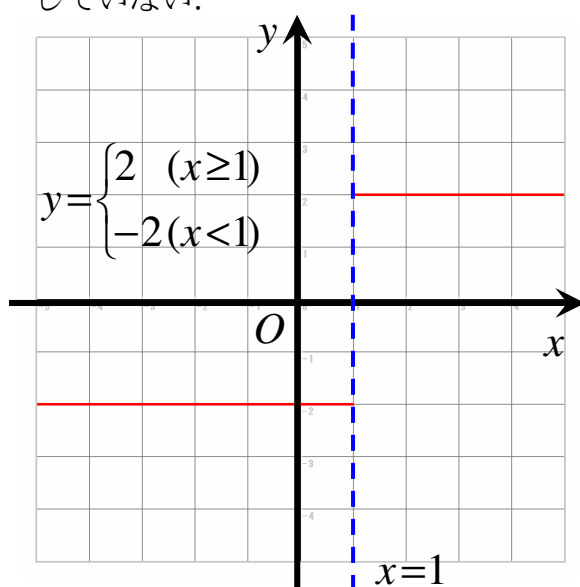
この二つを図で説明しよう。まずは、(1) かつ (2) を満たしている図形は、例えば右図のようなものになる。この関数は、すべての区間において連続だし、滑らかである。つまり、すべての区間で、 x で微分できるといえる。



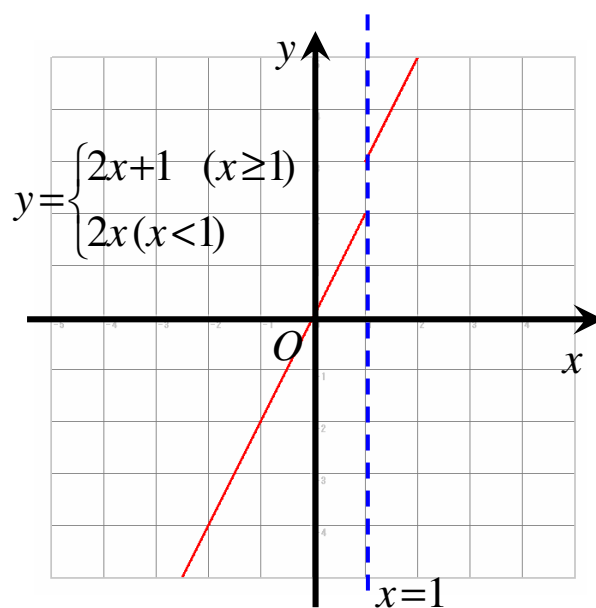
=Figure 1=

1. 1 連続でない例

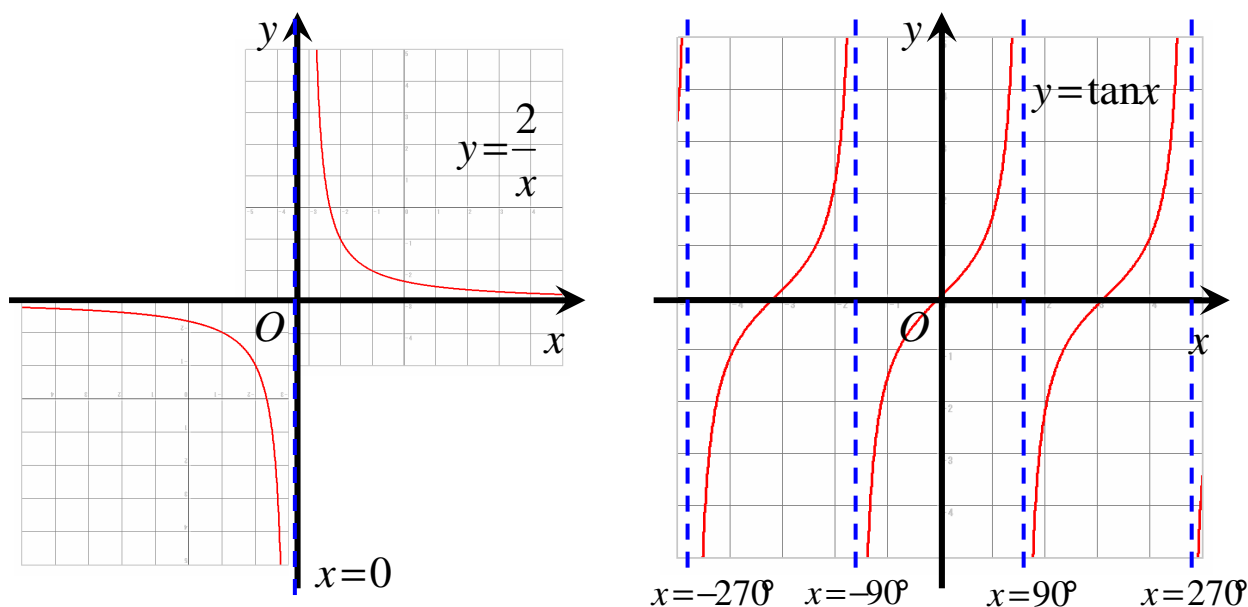
では、微分可能性を満たしていないのはどのような場合であろうか。まず、連続していないケースを取り上げる。以下は、ある点において、連続性を満たしていない。



=Figure 2=



この二つはいずれも、 $x=1$ を境に二つの方程式から成り立つ関数である。結果、いずれも $x=1$ において連続で無く、微分可能でない。では、次は一つの方程式であるにもかかわらず、連続でないケースである。



=Figure 3=

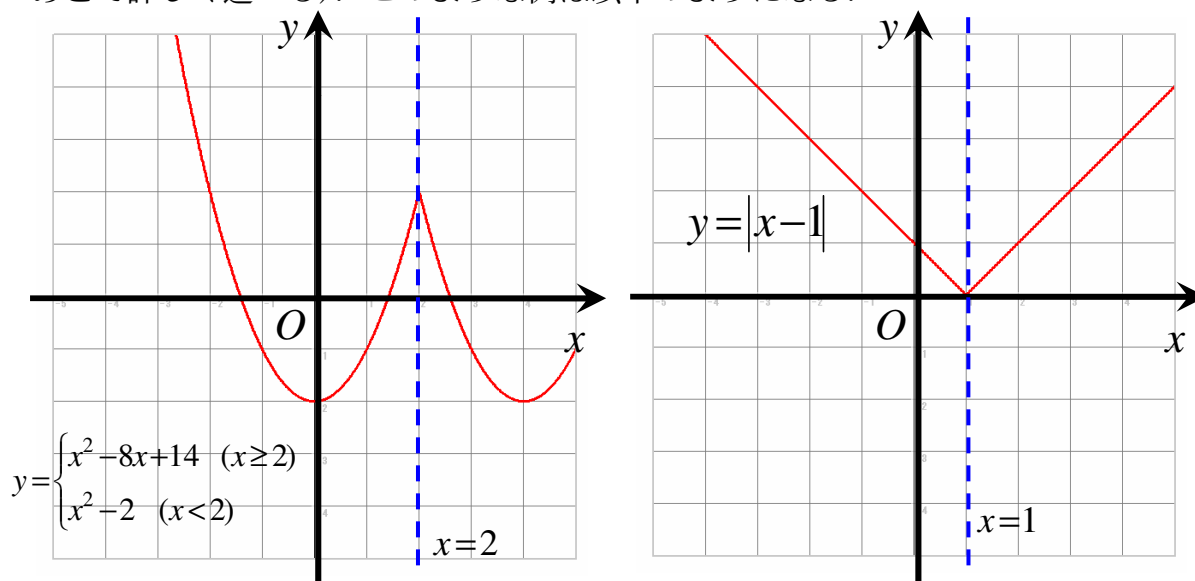
Figure3 の左は反比例のグラフである。単純な一つの方程式から成り立っているにも、かかわらず、 $x=0$ の直線が漸近線³⁸になっており、 $x=0$ では連続していない。右も同様な例である。 $\tan$ の周期と同じく、微分不可能な箇所が 180° ごとに繰り返されている³⁹。

³⁸ 漸近線とは、ある曲線が限りなく近づいていくが、絶対に交わることのできない直線。

³⁹ $\tan(\text{tangent})$ とは、傾きと訳す。水平方向に対し x 度の傾きがある直線の傾きが、 $\tan x$ の値である。このとき、水平方向から 90° や 270° などの傾きがあるとき、この直線は垂直になる。垂直であるということは、傾きが無限になり値をとれない。だから、 90° や 270° などの角度のとき、 $\tan$ の値が取れないので、このとき $\tan$ の関数は連続でなくなる。

1. 2 なめらかでない例

なめらかでないということは、突然、傾きが急激に変化してしまうことである。つまり、ある点でなめらかでないということは、その点のすぐ左側の接線の傾きとすぐ右側の接線の傾きが異なるということである（これについては、あとで詳しく述べる）。このような例は以下のようになる。



=Figure 4=

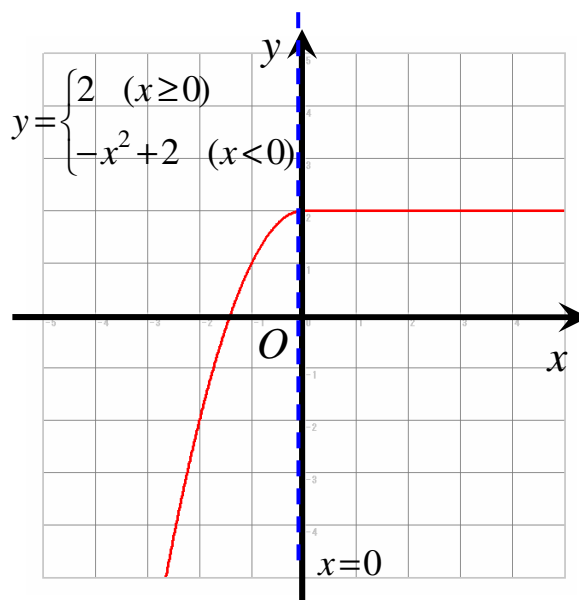
まず、Figure4 の左から検討しよう。これは、二つの方程式から成り立っているが連続性を保っている例である。しかし、 $x=2$ においてなめらかではない。右は一つの方程式から成り立っている関数である。しかし、この方程式には絶対値が使用されている。このように、絶対値が使用されている関数は滑らかでない場合が多いが、それは実質的には二つの方程式から構成されているのと同じ

だからである。絶対値をはずせば、この関数は $y = \begin{cases} x-1 & (x \geq 1) \\ -x+1 & (x < 1) \end{cases}$ となる。結

果、 $x=1$ でなめらかではなくなっている。 $x=1$ の左では傾きは常に-1、 $x=1$ の右では傾きは常に1である。つまり、 $x=1$ において、傾きが急激に変化しているといえる。よって、なめらかといえない。

1. 3 二つの方程式から成り立つが、連続でなめらかである例

1. 2 のなめらかでない場合は、どちらも二つの方程式から成り立つ関数であった。では、複数の方程式から成り立つ関数はそのつなぎ目で常になめらかでないのだろうか。実際には、そうでない。以下は、二つの方程式から成り立ち、さらにすべての区間でなめらかである例である。



=Figure 5=

$x = 0$ が関数のつなぎ目になっている。左側の方程式は2次関数だが、 $x = 0$ において頂点であり、傾きが0である。右側の方程式も、水平で傾きは0である。よって、左右の傾きが0で一致するので、なめらかさを保っている。

1. 4 なめらかさの直観的な検証

1. 2 と 1. 3 では、連続である場合に、なめらかであるときと、なめらかでないときを取り上げた。1. 2 の方は明らかになめらかでないが、1. 3 はグラフだけを見ても微妙である。では、グラフではなめらかさの検証はできないのだろうか。これに関しては、導関数 (derivative)⁴⁰ をグラフに描けば、直観的な判断が可能となる。

そこで、ここでは Figure5 (2つの方程式から成り立ち連続でなめらかで、これを①とする) と Figure4 (2つの方程式から成り立ち連続だがなめらかでない、

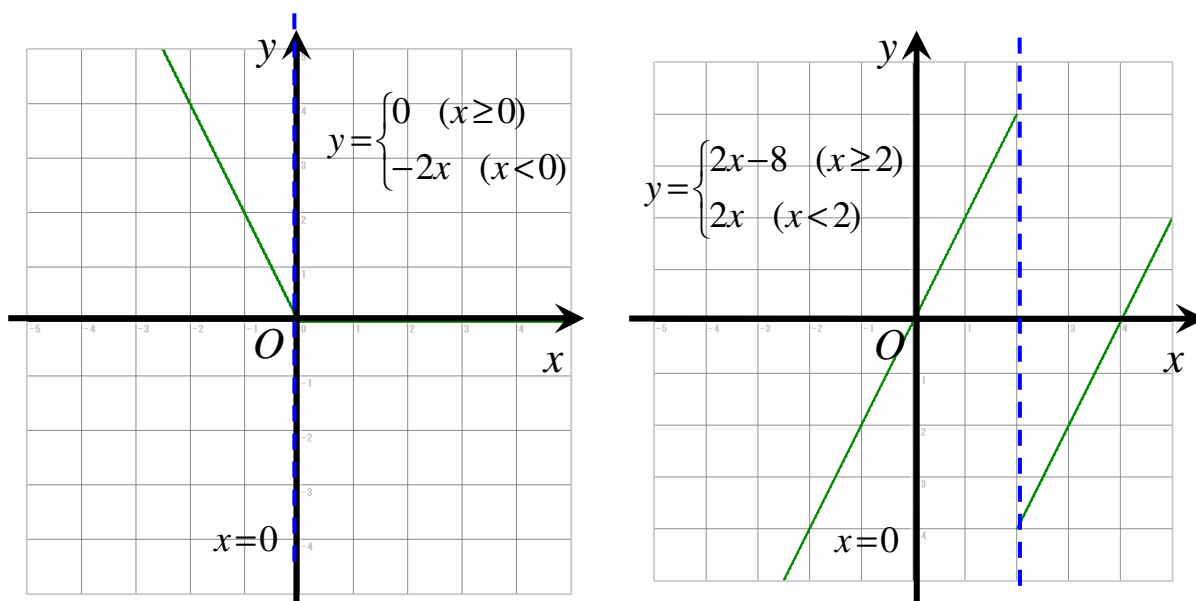
⁴⁰ 導関数とは、微分して求められた関数のこと。例えば、 $y = x^2$ の導関数は、 $y = 2x$ 。

これを②とする) の左でとりあげたものを使って説明しよう. それぞれの導関数を求める.

$$\textcircled{1} \quad y = \begin{cases} 2 & (x \geq 0) \\ -x^2 + 2 & (x < 0) \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} 0 & (x \geq 0) \\ -2x & (x < 0) \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad y = \begin{cases} x^2 - 8x + 14 & (x \geq 2) \\ x^2 - 2 & (x < 2) \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} 2x - 8 & (x \geq 2) \\ 2x & (x < 2) \end{cases}$$

これを描くと次のようになる.



=Figure 6=

よって, なめらかである場合には, 導関数が連続であり, そうでないときには導関数が連続しない. つまり, 導関数を描くことによって, 微分可能性の一つのなめらかさが確認できた.

では, 導関数が連続であれば, 必ず微分可能なのだろうか. 答えは, そうでない. 例えば, Figure 2 の二つの関数は, 非連続とはいえ, 常に傾きは一定である. よって, もしこれの導関数を描けば, 連続な直線 (しかも水平) が描けるはずである.

つまりまとめると, 関数のある定義域⁴¹において微分可能であるためには, その定義域においてその**関数が連続**であり, かつ, その**導関数も同じ定義域において連続**であることが必要といえる.

⁴¹ 定義域とは, 例えば $x \rightarrow y$ である関数 $y = f(x)$ であれば, x のとる範囲が定義域といえる.

2. 微分可能条件 (厳密な定義)

本稿では 1. と異なり、直観的でなく、微分可能条件についての厳密な定義を示したい。

2. 1 微分の定義の復習と微分可能条件

$x \rightarrow y$ である関数 $y = f(x)$ を考える。

この関数の x が変化したとき y も変化するが、 y の x に対する変化率⁴²は、 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ Δy を Δx で表す。 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ よって、

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ここで、 Δx を限りなく 0 に近づけてみる ($\Delta x \rightarrow 0$)。このような Δx を dx と書く。このとき、 y は x に従属するので、 Δy も限りなく 0 に近づくはずである ($\Delta y \rightarrow 0$)。 x と同様に、 Δy を dy と書く

そこで、 $\Delta x \rightarrow 0$ のとき $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ を考えれば、

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad 43$$

この値を求めることが微分である。よって、 $x = a$ によって、**微分可能である**

ということは、 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ **⁴⁴が存在する** ということに他ならない。

⁴² このような変化率を平均変化率という。

⁴³ $\frac{dy}{dx}$ は接線の傾きを示す。

⁴⁴ このとき、 $x = a$ なので、 $y = f(x)|_{x=a}$ から $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)|_{x=a}$ この値を微分係数 (differential coefficient) という。つまり微分係数とは、導関数の独立変数 (x みたいなもの) に定数を代入したものといえる。

さて、先ほどの定義は、極限值が存在する（lim できるということ）ことが前提であった。そこで、厳密に微分可能性を定義するには、極限が存在することも付け加えなくてはならない。

極限が存在するということは、変数の近づき方（大きい方から近づくのか、小さい方から近づくのか）に関係なく、極限值が一つの一つの値に収束することである。つまり、

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \quad 45 \quad 46 \quad \dots \quad (*)$$

これが存在し成立する必要がある。これは、 $x = a$ において微分可能であることの必要十分条件であり、極限值が存在することも含めた微分可能の条件となる。

2. 2 厳密な微分可能条件と直観的な条件の整合性

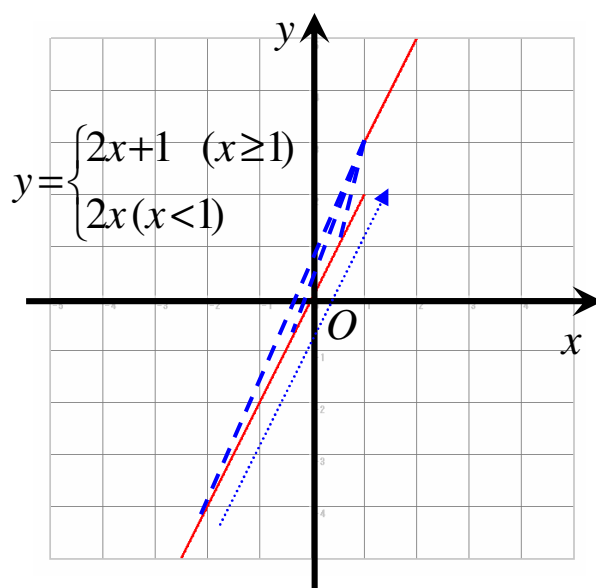
そこで、条件式（*）と、1. で述べてきた直観的な微分可能条件の整合性を確認したい。直観的な条件は、「連続であること」と「なめらかであること」である。

まず、なめらかさについては問題ないだろう。なめらかであることは、微分を行う点のすぐ左側の接線の傾きとすぐ右側の接線の傾きが一致することである。そこで、（*）の両辺は接線の傾きである $\frac{dy}{dx}$ を求めたのであり、（*）の式は、左辺が左側の接線の傾き、右辺が右側の接線の傾きであり、それらが等しいということをそのまま示しているわけである。

おそらく、戸惑うのは（*）が連続性も意味していることであろう。そこで、Figure1 で連続でないケースとして紹介した図を再掲する。

⁴⁵ $\Delta x \rightarrow 0-$ とは、小さい方から 0 に近づけた極限を指し、 $\Delta x \rightarrow 0+$ は、大きい方から 0 に近づけた極限を指す。

⁴⁶ $\Delta x \rightarrow 0-$ のときの微分係数を左側微分係数 (left-hand derivative)、 $\Delta x \rightarrow 0+$ のときの微分係数を右側微分係数 (right-hand derivative) という。



=Figure 7=

上の関数を構成する2つの方程式 $y=2x+1$ ($x \geq 1$), $y=2x$ ($x < 1$) について考えよう. いずれも, 右辺を微分すれば2になるので, $x=1$ において左右の微分係数が一致し, (*) を満たしそうである. しかし, 実際はそうではなく, $x=1$ における右側極限值 (* の左辺) が ∞ となり, 等式が成立しない. なぜならば, 微分係数は $\frac{dy}{dx}$ の値であり, 元をたどれば平均変化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ である. 平均変化率は, 2点の線分の傾きだが, 今回, $x=1$ は $y=2x+1$ ($x \geq 1$) に含まれており, $y=2x$ ($x < 1$) の点が $x=1$ に進んで極限していく際, 図の破線に表れているように, 左側微分係数の値が際限なく上昇し続ける. 対して, 右側極限では, $x=1$ は $y=2x+1$ ($x \geq 1$) に含まれており, 右側微分係数の値が2のままである. $\infty \neq 2$ より, (*) は成立しない.

そこで, 左側の $y=2x$ ($x < 1$) が $x=1$ も含み, $y=2x$ ($x \leq 1$) であれば問題ないというものがいるのかもしれない. このとき, 確かに左右の微分係数は2になり, (*) が成立する. しかし, この場合, $y = \begin{cases} 2x+1 & (x \geq 1) \\ 2x & (x \leq 1) \end{cases}$ において, 独立変数 $x=1$ において, 従属変数 y が2,3と2つの値をとる. そもそも, 独立変数に対して, 従属変数が複数の種類の値をとる方程式を, 関数とは呼ばない. よって, やはり, (*) が関数の微分可能性を示したものであるといえるのである.

3. 微分可能性の検証

本項では、2 でならった微分可能の条件式を実際に考え、使えるようにすることが目的である。以下の①②は 1. 4 で取り上げたものと同じである。

$$\textcircled{1} \quad y = \begin{cases} 2 & (x \geq 0) \\ -x^2 + 2 & (x < 0) \end{cases} \quad \text{の } x = 0 \text{ における微分可能性}$$

<検討>

$y = f(x)$ と考える。(*)においては $a = 0$ より、

左側極限は、

$$\lim_{\triangle x \rightarrow 0-} \frac{f(a + \triangle x) - f(a)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \rightarrow 0-} \frac{f(\triangle x) - f(0)}{\triangle x}$$

$f(0)$ は $f(x) = 2 \ (x \geq 0)$ に $x = 0$ を代入したものであり、 $f(\triangle x)$ は

$\triangle x \rightarrow 0- < 0$ より、 $f(x) = -x^2 + 2 \ (x < 0)$ に $x = \triangle x$ を代入したものである。

$$\begin{aligned} \lim_{\triangle x \rightarrow 0-} \frac{f(a + \triangle x) - f(a)}{\triangle x} &= \lim_{\triangle x \rightarrow 0-} \frac{\{- (\triangle x)^2 + 2\} - 2}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \rightarrow 0-} \frac{- (\triangle x)^2}{\triangle x} \\ &= \lim_{\triangle x \rightarrow 0-} (-\triangle x) = 0 \end{aligned}$$

右側極限も同様にして、 $x \geq 0$ においては、 $y = 2$ より、 $f(x) = 2$

$$\lim_{\triangle x \rightarrow 0+} \frac{f(a + \triangle x) - f(a)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \rightarrow 0+} \frac{2 - 2}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \rightarrow 0+} \frac{0}{\triangle x} = 0$$

よって、左右の微分係数が一致するので、 $x = 0$ において、微分可能といえる。

$$\textcircled{2} \quad y = \begin{cases} x^2 - 8x + 14 & (x \geq 2) \\ x^2 - 2 & (x < 2) \end{cases} \quad \text{の } x = 2 \text{ における微分可能性}$$

<検討>

$y = f(x)$ と考える. (*)においては $a = 2$ より,

左側極限は,

$$\lim_{\triangle x \rightarrow 0-} \frac{f(a + \triangle x) - f(a)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \rightarrow 0-} \frac{f(\triangle x + 2) - f(2)}{\triangle x}$$

この $f(2)$ は, $x^2 - 8x + 14$ ($x \geq 2$) に $x = 2$ を代入したものである.

よって, $f(2) = 2$

$$\begin{aligned} \lim_{\triangle x \rightarrow 0-} \frac{f(a + \triangle x) - f(a)}{\triangle x} &= \lim_{\triangle x \rightarrow 0-} \frac{\{(\triangle x + 2)^2 - 2\} - 2}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \rightarrow 0-} \frac{\{(\triangle x)^2 + 4\triangle x + 4\} - 4}{\triangle x} \\ &= \lim_{\triangle x \rightarrow 0-} \frac{(\triangle x)^2 + 4\triangle x}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \rightarrow 0-} (\triangle x + 4) = 4 \end{aligned}$$

右側極限も同様にして, $\triangle x \rightarrow 0+$ から $a + \triangle x > a \geq 2$ より,

$$\lim_{\triangle x \rightarrow 0+} \frac{f(a + \triangle x) - f(a)}{\triangle x} \quad \text{における } f(x) \text{ はすべて, } x^2 - 8x + 14 \quad (x \geq 2)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\triangle x \rightarrow 0+} \frac{f(a + \triangle x) - f(a)}{\triangle x} &= \lim_{\triangle x \rightarrow 0+} \frac{\{(\triangle x + 2)^2 - 8(\triangle x + 2) + 14\} - 2}{\triangle x} \\ &= \dots = -4 \end{aligned}$$

よって, $4 \neq -4$ から左右の微分係数が一致しないので, $x = 2$ において, 微分可能ではない.

7 全微分（岡田・河野）

＝目次＝

1. 1変数の場合の微分とは何か（岡田）
2. 2変数の場合の全微分（岡田）
3. n 変数の場合の全微分（岡田・河野）
4. 全微分の利用（河野）

1. 1変数の場合の微分とは何か

関数 $y = f(x)$ が与えられている。このとき、「この関数を微分する」とは「 x の微小な変化(dx)による y の微小な変化, dy を求めること」である。では、「 $\frac{dy}{dx}$ を求めること」は何というのか。これは「 $y = f(x)$ の導関数を求める」又は「 $y = f(x)$ を x に関して微分する」ということである。「 $y = f(x)$ の導関数を求めること」と「 $y = f(x)$ を微分すること」では意味が異なるのである。

例： $y = 2x$

この関数の導関数を求める $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2$

この関数を微分する $\Rightarrow dy = 2dx$

2. 2変数の場合の全微分

$z = f(x, y)$ が与えられている。このとき、「この関数を全微分(total differential)する」とはどういうことか。それは、「 x の微小な変化(dx)による z の微小な変化と y の微小な変化(dy)による z の微小な変化の和, dz を求めること」である。まず、 x の微小な変化による z の微小な変化を求める。これ求めるには、既に習

った偏微分を用いればよい(偏微分に関しては基礎数学の教科書参照). 結果, x の微少な変化による z の微小な変化は「 $\frac{\partial z}{\partial x} dx$ 」である. 同様に, y の微少な変

化による z の微小な変化は「 $\frac{\partial z}{\partial y} dy$ 」である.

よって, その変化の和, dz は,

$$\underline{dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy} \quad \text{となる.}$$

例: $z = x^2 y$

この関数を全微分する.

x の微少な変化による, z の微小な変化は $\frac{\partial z}{\partial x} dx = 2xy dx$

y の微少な変化による, z の微小な変化は $\frac{\partial z}{\partial y} dy = x^2 dy$

$$\underline{\text{よって } dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 2xy dx + x^2 dy}$$

3. n 変数の場合の全微分

n 個の変数を持つ多変数関数 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を全微分する. その結果は

$$\underline{dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n} \quad \text{である.}$$

さらに, 一般化すれば, $\underline{dy = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_k} dx_k}$ と表される.

4. 全微分の実践

全微分は無差別曲線(indifference curve)の接線の傾きの絶対値である限界代替率(MRS)や、等量線(isoquant)の接線の傾きの絶対値である技術的限界代替率(MRTS)の式を求める際によく使用される。それぞれについて、実践してみよう。

4. 1 限界代替率の場合

財X・財Yによる2財経済を想定し、効用関数(utility function)が $U = f(x, y)$ だとしよう。これに、全微分を適用すれば、 $dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy$

そこで、無差別曲線では、効用は一定に保たれるので、XとYの消費量をいくら動かしても、効用に変化はない。よって、 $dU = 0$ より、 $\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = 0$ ゆえに、 $x-y$ 平面における傾きを表すと、 $\frac{\partial U}{\partial y} dy = -\frac{\partial U}{\partial x} dx$ から $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial U / \partial x}{\partial U / \partial y}$ となる。 $\frac{\partial U}{\partial x} = MU_x$, $\frac{\partial U}{\partial y} = MU_y$ (MU とは限界効用) と表されるので、 $\frac{dy}{dx} = -\frac{MU_x}{MU_y}$

よって、この絶対値である限界代替率は、 $MRS = \frac{MU_x}{MU_y}$ と表された。

4. 2 技術的限界代替率の場合 (練習問題)

今回は資本Kと労働Lによる2要素経済を想定しよう。ある財の生産関数(production function)が、 $Q = f(K, L)$ だとしよう。等量線とは、一定の生産量を保ったときのKとLの組み合わせをつないだ点の集合である。このとき、 $L-K$ 平面において、技術的限界代替率は、 $MRTS = \frac{MPL}{MPK}$ と表されることを全微分を使

って、証明しなさい。ちなみに、 $MPL = \frac{\partial Q}{\partial L}$, $MPK = \frac{\partial Q}{\partial K}$ である。⁴⁷

参考文献

現代経済学の数学基礎(上) A.C.チャン 著 シーエーピー出版
大学で学ぶ 微分積分 沢田賢／渡辺展也／安原晃 共著 サイエンス社

⁴⁷ MPL は労働の限界生産物，MPK は資本の限界生産物である。

8 積分とその利用／面積の求め方（中村・岡田・高橋）

1. 積分とは

関数 $f(x)$ に対して、微分すると $f(x)$ になる関数、つまり $F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を、 $f(x)$ の不定積分という。

例 $(x^2)' = 2x, (x^2 + 1)' = (x^2)' + (1)' = 2x$

$x^2, x^2 + 1$ はいずれも $2x$ の不定積分である。

以上の例からわかるように、不定積分は定数項の数だけ無数にある。よって、 $f(x)$ の不定積分は、一般的に次のように表される。

$$F(x) + C \quad (C \text{ は定数})^{48}$$

また、関数 $f(x)$ の不定積分を、記号 $\int f(x) dx$ ⁴⁹ で表す。

$F(x)$ を $f(x)$ の 1 つの不定積分とすると、 $f(x)$ の任意の不定積分は

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (C \text{ は定数}) \quad \text{と表される。}$$

例 $\int 2x dx = x^2 + C \quad C \text{ は定数}$

関数 $f(x)$ の不定積分を求めることを、 $f(x)$ を積分するという。

つまり、関数を積分するには、微分の逆を考えれば良い。

⁴⁸ この定数 C を積分定数という。

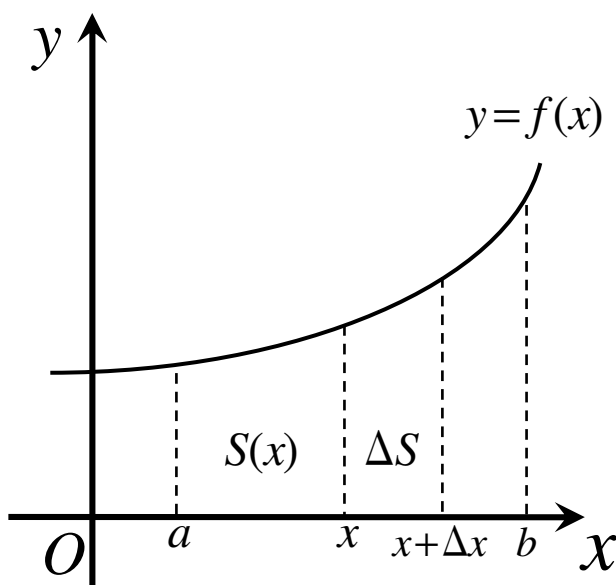
⁴⁹ 記号 $\int$ は、「インテグラル」と読む。

2. 積分を利用した面積の求め方

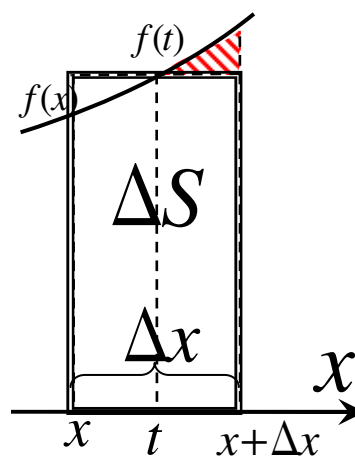
関数 $f(x)$ は、区間 $[a, b]$ で常に $f(x) \geq 0$ であるとする。このとき、この区間で、 $y = f(x)$ と x 軸に挟まれる部分の面積 S を、不定積分を用いて表すことを考える。

$a \leq x \leq b$ である任意の数 x に対して、区間 $[a, x]$ で、曲線と x 軸に挟まれる部分の面積を $S(x)$ とする。このとき、 $S(x)$ は x の関数で、次のことが成立する。

$S(x)$ は $f(x)$ の 1 つの不定積分である。



=Figure 1=



=Figure 2=

何故、積分を使うことで面積を求めることができるのか？

関数 $f(x)$ は、区間 $[a, b]$ で常に $f(x) \geq 0$ であるとする。この区間で、曲線 $y = f(x)$ と x 軸に挟まれる Figure 1 の $S(x)$ の面積について考える。この部分の面積は x が増えれば、増えるし、 x が減れば、減る。つまり、この部分の面積は x に関する増加関数であるといえる。

ここで、 x が Δx 増加した場合を考える ($\Delta x > 0$)。また、 $S(x)$ の増分を ΔS とす

ると($\Delta S > 0$). Figure 2 のように, x と $x + \Delta x$ の間に $\Delta S = f(t)\Delta x$ (Figure2 の太棒が右辺) を満たす t があるはずである. これを変形すると $\frac{\Delta S}{\Delta x} = f(t)$ となる.

$\Delta x \rightarrow 0$ のとき, $t \rightarrow x$ となるから, $f(t) \rightarrow f(x)$ となり,

$\Delta x \rightarrow 0$ のとき $\frac{\Delta S}{\Delta x} \rightarrow f(x)$ が成り立つ.

したがって, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{dS}{dx} = f(x)$

すなわち, $S'(x) = f(x)$ となり, $S(x)$ は $f(x)$ の 1 つの不定積分であるといえる.

ここで, $F(x)$ を $f(x)$ の任意の不定積分とすると,

$$S(x) = F(x) + C \quad (C \text{ は定数})$$

また, $x = a$ のとき, $S(a) = 0$ なので

$$0 = F(a) + C \quad \text{ゆえに, } C = -F(a)$$

したがって, $S(x)$ は $F(x)$ を用いて, 次のように表される.

$$S(x) = F(x) - F(a)$$

特に, $x = b$ とおくと, 区間 $[a, b]$ で, $y = f(x)$ と x 軸に挟まれる部分の面積 S は, 次のように表される.

$$\boxed{S = F(b) - F(a) \quad \text{ただし, } F(x) = \int f(x) dx}$$

例 区間 $[0, 1]$ で $y = 2x$ と x 軸に挟まれる部分の面積 S は, 次のように求められる.

$$F(x) = \int 2x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\text{より, } S = F(1) - F(0) = 1$$

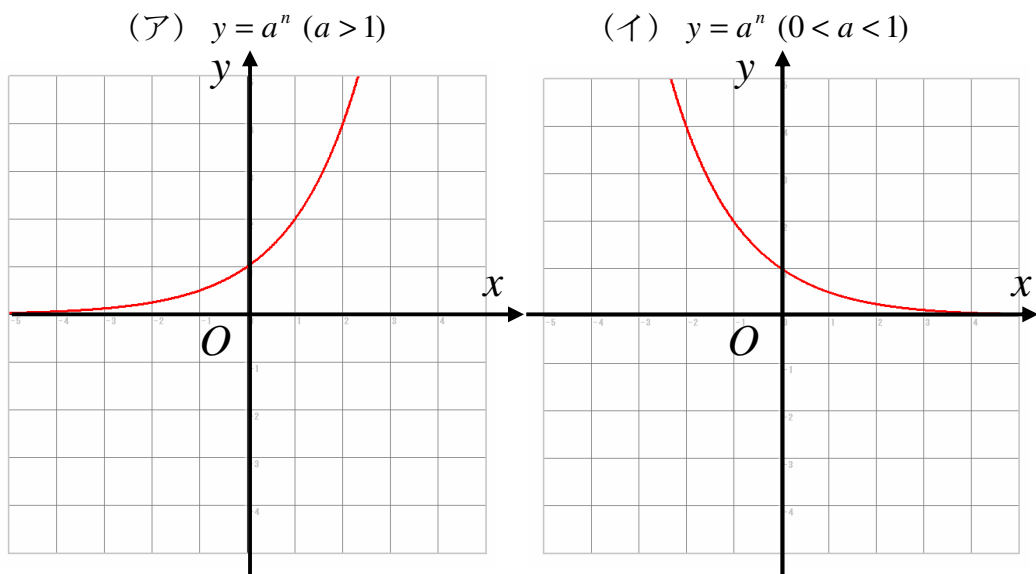
9 対数の基本的な性質（河野）

1. 指数

$$a^0 = 1 \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad a^m a^n = a^{m+n} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (ab)^n = a^n b^n$$

<指数関数のグラフ>



2. 対数

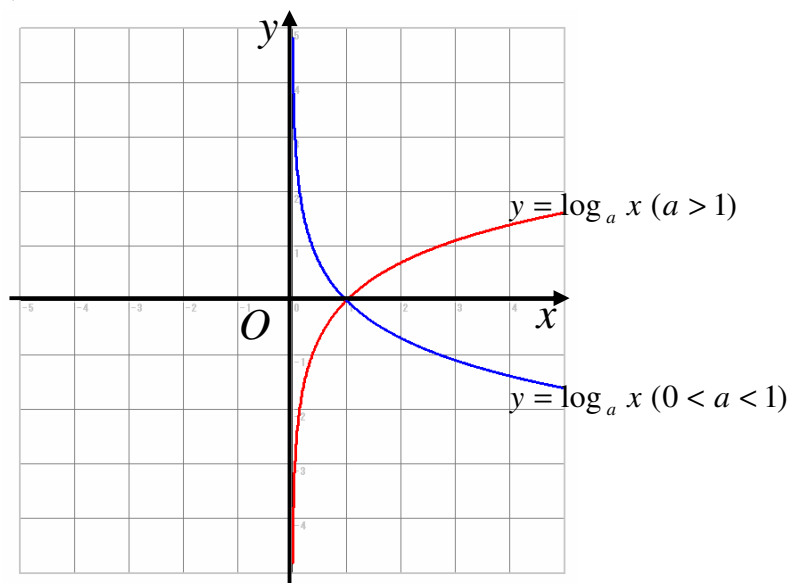
$$a^m = X \Leftrightarrow \log_a X = m \ (a > 0, a \neq 1, M > 0)$$

$$a^{\log_a X} = X \quad \log_a a = 1$$

$$\log_a XY = \log_a X + \log_a Y \quad \log_a \frac{X}{Y} = \log_a X - \log_a Y$$

$$\log_a X^N = N \log_a X \quad \log_a X = \frac{\log_b X}{\log_b a}$$

<対数関数のグラフ>

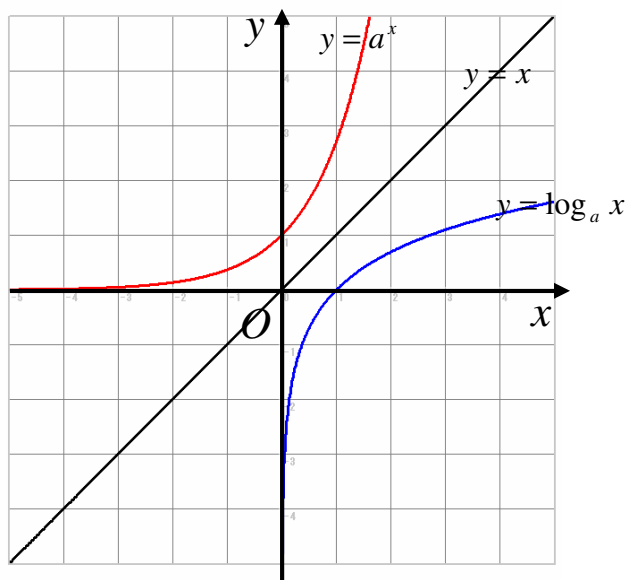


c f : $a^x = y \Leftrightarrow \log_a y = x$

よって, $y = a^x$ と $y = \log_a x$ は, x と y に関して対称的⁵⁰

∴ xy 平面では, $y = a^x$ と $y = \log_a x$ は, $y = x$ に関して線対称となる.

以上をグラフで示したものが以下である. ($a > 1$)



⁵⁰ 変数の独立変数と従属変数を入れ替えた関数を逆関数 (Inverse function) という.

付録 指数法則の応用

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0) \quad \text{となる理由}$$

指数法則： $a^m a^n = a^{m+n}$ $\cdot (a^m)^n = a^{mn}$ $\cdot (ab)^n = a^n b^n$ (m, n は正の整数)

を使って、 $a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$ を示す.

$a \neq 0$ とする. このとき, 指数 n が 0 や負の整数の場合にも, a^n の意味を, 上の指数法則が成り立つように定めよう.

まず, $n = 0$ のときに, $\cdot a^m a^n = a^{m+n}$ が成り立つとすると,

$$a^m a^0 = a^{m+0} \quad \text{つまり} \quad a^m a^0 = a^m$$

両辺を a^m で割って消すと $a^0 = 1$ だといえる.

次に, n が正の整数で, $m = -n$ のとき, $\cdot a^m a^n = a^{m+n}$ が成り立つとすると,

$$a^{-n} a^n = a^{-n+n} = a^0 \quad \text{つまり} \quad a^0 = 1 \quad \text{より} \quad a^{-n} a^n = 1$$

両辺を a^n で割って移項すると $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ だといえる.

ちなみに, これらを使って以下のことがいえる.

$$\cdot \frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}$$

$$\cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = (a \cdot b^{-1})^n = a^n (b^{-1})^n = a^n \cdot b^{-1 \cdot n} = a^n \cdot b^{-n} = a^n \cdot \frac{1}{b^n} = \frac{a^n}{b^n}$$

(分かりにくかったら, 文字に数値を代入して考えよ.)

練習問題

注意

- 1 登場する文字は，特に断りがない限り，全て実数であるとする.
- 2 特に断りがない限り， x, y を変数， a, b, c, d, p, q を定数として扱う.
- 3 解く際，途中計算式及び解法の説明も残しておきましょう.

1 対数について

(1) $a > 1$ のとき，次のグラフを xy 平面に描き，互いにどのような関係があるか述べよ.

① $y = \log_a x$ ② $y = a^x$ ③ $y = \log_{\frac{1}{a}} x$

(2) xy 平面における $y = \log_5 x$ のグラフを描き，次を求めよ.

① x 切片 ② $y = 1$ のときの y の値 ③ $y = \frac{1}{5}$ のときの x の値

(3) コブ・ラグラス型関数 $U = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$ に対し，対数をとったときどのような性質があるか述べよ. ⁵¹

⁵¹ $\ln U = \ln x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$ を展開すれば良い. $\ln$ とは $\log_e$ のことである.

2 逆関数の性質について

○以下の方程式のグラフを書け.

- $x = y^2$

- $y = \sqrt{x}$

- $x = y^2 + 1$

- $y = \sqrt{x-1} + 3$ ⁵²

- $f(x) = (x-2)^2 + 3$ のときの $y = f^{-1}(x)$

3 数列について

問 $a_n = a(1+r)^n$ のとき, $\sum_{i=1}^n a_n$ と $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ を求めよ.

4 微分について

問 $f(x) = \sqrt{x}$ のとき, 以下の関数を求め, そのグラフも書け.

(1) $y = f(x)$

(2) $y = \frac{d}{dx} f(x)$

(3) $y = \frac{d^2}{dx^2} f(x)$

⁵² xy 座標平面において $y = f(x)$ のグラフを, x 軸方向に p , y 軸方向に q 移動させると, $y - q = f(x - p)$ となる.

5 その他

問 $\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, $e = \lim_{h \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^h$ を利用して, 以下を証明しなさい.

(1) $\frac{d^n}{dx^n} e^x = e^x$ (n は全ての自然数)

(2) $\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$

(3) $\frac{d}{dx} \log_a f(x) = \frac{f'(x)}{f(x) \ln a}$ ⁵³

参考 証明する際, 以下の例題を参考にせよ.

例題 $\frac{d}{dx} e^x = e^x$ を証明せよ.

証明

$$\frac{d}{dx} e^x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x (e^h - 1)}{h}$$

e^x は h に従属しないので,

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

ここで, $e = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}$ を代入すると,

⁵³ 今回, $f'(x)$ は $\frac{d}{dx} f(x)$ を意味している.

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left\{ \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \right\}^h - 1}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \right\}^h - 1}{h}$$

h は t に従属しないので,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}e^x &= e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \right\}^h - 1}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \left[\lim_{t \rightarrow 0} \left\{ (1+t)^{\frac{1}{t}} \right\}^h \right] - 1}{h} \\ &= e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lim_{h, t \rightarrow 0} \left(1 + t \frac{h}{h} \right)^{\frac{h}{t}} - 1}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lim_{\substack{h/t \rightarrow 1 \\ t \rightarrow 1}} \left(1 + h \frac{t}{h} \right)^{\frac{h}{t}} - 1}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h \cdot 1)^1 - 1}{h} \quad 54 \\ &= e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+h-1}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} 1 = e^x \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}e^x = e^x \quad (\text{証明終})$$

⁵⁴ $\lim_{h, t \rightarrow 0} \frac{h}{t} = 1$ と考えている.

10 対数の微分とその利用 (河野)

<対数の微分>

例題 1 $\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, $e = \lim_{h \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^h$ を利用して,
 $\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \log_e a}$ を証明しなさい.

証明

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \log_a x &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a (x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a \frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right) \quad 55 \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} \quad \dots \textcircled{1} \quad 56 \end{aligned}$$

ここで, $\frac{h}{x} = t$ となる変数 t を用意すると, $h \rightarrow 0$ のとき, $t \rightarrow 0$

また, $\frac{1}{h} = \frac{1}{xt}$ とおける.

①に $\frac{h}{x} = t$ および $\frac{1}{h} = \frac{1}{xt}$ を代入し, さらに $h \rightarrow 0$ を $t \rightarrow 0$ と変換できるので,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \log_a x &= \lim_{h \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{t \rightarrow 0} \log_a (1+t)^{\frac{1}{xt}} = \lim_{t \rightarrow 0} \log_a (1+t)^{\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{x}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a (1+t)^{\frac{1}{t}} \quad 57 \end{aligned}$$

$$55 \quad \log_a X - \log_a Y = \log_a \frac{X}{Y}$$

$$56 \quad N \log_a X = \log_a X^N$$

$$57 \quad N \log_a X = \log_a X^N$$

x は t に従属しないので,

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x} \lim_{t \rightarrow 0} \log_a (1+t)^{\frac{1}{t}} = \frac{1}{x} \log_a \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \right\}$$

$$e = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \text{ より, }^{58}$$

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x} \log_a e$$

対数の底を e に変換すると,

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x} \frac{\log_e e}{\log_e a} = \frac{1}{x \log_e a} \quad^{59}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a} \quad (\text{証明終}) \quad^{60}$$

対数の微分の応用

1. 自然対数の微分

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a} \text{ に } x=e \text{ を代入すると, } \frac{d}{dx} \log_e x = \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x} \quad^{61}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$^{58} e = \lim_{h \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{h} \right)^h = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}$$

$$^{59} \log_a X = \frac{\log_b X}{\log_b a}$$

⁶⁰ 底を e とする対数 (例: $\log_e x$) を自然対数 (natural log) といい,

$\log_e$ の部分を単に $\log$ や $\ln$ と表す. (つまり, $\log_e x = \log x = \ln x$)

$$^{61} \ln e = \log_e e = 1$$

2. 増加率・成長率 (percent change)

②より, 変形して, $\underline{d \ln x = \frac{dx}{x}}$ と言える. ...③ ⁶²

3. 弾力性

例えば, 需要の価格弾力性を ε とすると,

$$\varepsilon = \frac{dQ/Q}{dP/P} \quad (P \text{ は価格で, } Q \text{ は需要量})$$

③より, $\frac{dQ}{Q} = d \ln Q$, $\frac{dP}{P} = d \ln P$ から,

$$\therefore \underline{\varepsilon = \frac{d \ln Q}{d \ln P}} \quad \dots \textcircled{4}$$

4. 需要関数

例えば, 需要関数 $\underline{Q = aP^{-b}}$ を考える (P は価格で, Q は需要量, a, b は正の定数).

これに対して, 両辺に自然対数を取ると,

$$\ln Q = \ln(aP^{-b}) = \ln a + \ln P^{-b} = \ln a - b \ln P$$

$$\underline{\ln Q = \ln a - b \ln P} \quad \dots \textcircled{5}$$

よって, 需要関数 $Q = aP^{-b}$ を一次式で表すことができた.

そこで, ⑤より, $d \ln Q = d \ln a - b \cdot d \ln P$

a は定数より, $d \ln a = 0$ で, $d \ln Q = -b \cdot d \ln P$

$$\therefore \textcircled{4} \text{より, 需要の価格弾力性 } \underline{\varepsilon = \frac{d \ln Q}{d \ln P} = -b} \quad \dots \textcircled{6} \quad 63$$

これに対して, 通常のやり方で弾力性を求めると,

⁶² これ自体は, 限界的な成長率. 本来は, 例えば, $\frac{\Delta x}{x}$.

⁶³ b は定数なので, この需要関数は全ての P , Q に対し, 弾力性が一定だといえる.

$$\varepsilon = \frac{dQ/Q}{dP/P} = \frac{dQ}{dP} \frac{P}{Q} \quad \dots \textcircled{7}$$

需要関数 $Q = aP^{-b}$ に対して、 $\frac{dQ}{dP}$ を求めると、

$$\frac{dQ}{dP} = \frac{d}{dP} aP^{-b} = -abP^{-b-1} \quad \text{これを、} \textcircled{7} \text{に代入して、}$$

$$\varepsilon = -abP^{-b-1} \frac{P}{Q} = \frac{-abP^{-b}}{Q} \quad \text{これに、需要関数の式 } Q = aP^{-b} \text{ を代入すると、}$$

$$\varepsilon = \frac{-abP^{-b}}{aP^{-b}} = -b \quad \text{これは確かに、対数を使って求めた弾力性の} \textcircled{6} \text{と一致する。}$$

5. コブ・ダグラス関数

例えば、コブ・ダグラス関数 $Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$ に対数を使って、変形してみよう。

$$\text{両辺に自然対数を取ると、} \ln Y = \ln(AK^{\alpha}L^{\beta}) = \ln A + \ln K^{\alpha} + \ln L^{\beta}$$

$$\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L$$

各項とも変数は1次なので、

$$d \ln Y = d \ln A + \alpha \cdot d \ln K + \beta \cdot d \ln L$$

③より、自然対数の限界変化は限界増加率と同じなので、

$$\therefore \frac{dY}{Y} = \frac{dA}{A} + \alpha \cdot \frac{dK}{K} + \beta \cdot \frac{dL}{L}$$

よって、 $(Y \text{ の増加率}) = (A \text{ の増加率}) + \alpha (K \text{ の増加率}) + \beta (L \text{ の増加率})$ ⁶⁴

⁶⁴ Y を GDP, A を技術水準, K を資本量, L を労働量とすれば、これはマクロ経済学の成長会計のモデル。

6. 指数対数の微分

例題 2 $\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$ を証明しなさい.

証明

$$y = a^x \text{ とする. } \quad \frac{d}{dx}a^x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}$$

$$y = a^x \text{ より, } x = \log_a y$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy} \log_a y = \frac{1}{y \ln a} \quad y = a^x \text{ より } \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y \ln a} = \frac{1}{a^x \ln a} \quad 65$$

$$\text{よって, } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = a^x \ln a \quad \therefore \quad \underline{\underline{\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a}} \quad (\text{証明終})$$

ちなみに, $a = e$ と置き換えると,

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \ln e = e^x \quad 66 \quad \therefore \quad \underline{\underline{\frac{d}{dx}e^x = e^x}}$$

⁶⁵ 例題 1 の 2 ページを参照せよ.

⁶⁶ $\ln e = \log_e e = 1$

練習問題

注意

- 1 登場する文字は，特に断りがない限り，全て実数であるとする.
- 2 特に断りがない限り， x, y を変数， a, b, c, d, p, q を定数として扱う.
- 3 解く際，途中計算式及び解法の説明も残しておきましょう.

問題 1 次を微分せよ.

- $y = \log_a x$
- $y = a^x$
- $y = \log_{\frac{1}{a}} x$
- $y = \log_{10} 2x$
- $y = \ln 2x$
- $y = \ln(1-3x)$
- $y = e^{2x}$
- $y = 3^{-x}$

問題 2 $\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$ と $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$ を自分で証明してみなさい.

問題 3 逆関数の性質を利用して， $\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$ から $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$ を導きなさい.

問題 4 コブラグラス型の効用関数 $U = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$ に自然対数を取って，効用の増加率と財の増加率の関係を示しなさい.

問題 5 需要関数 $Q = \frac{2}{P}$ において，需要の価格弾力性を，自然対数を使って求めなさい．

問題 6 Y を生産量， A を技術水準， K を資本ストック， L を労働投入量とする．生産関数が $Y = AK^{0.3}L^{0.7}$ で表されている．このとき，産出量，資本，労働の成長率がそれぞれ 3 %， 2 %， 1 % のとき，技術進歩率を求めなさい．

11 ベクトルの基本概念（河野）

本項では，ミクロ経済学で重要であるが，理解されにくい数学の単元であるベクトルの基本概念を説明する．著者は，本項執筆の際に，6冊ほどの数学・経済数学の本を参照したが，どれもベクトルについては満足のいく説明はなされていなかった．さらに，高校時代の数学B⁶⁷でもベクトルは習うが，あれは物理学で使用するベクトルの概念であり，経済学ではあまり使えない．この単元における目標は，経済学で使える「ベクトルとは何か？」を理解すること以外，他ならない．皆さんがその目標を達成されることを期待している．

＝目次＝

1. ベクトルの定義
 1. 1 物理学のベクトル
 1. 2 経済学でのベクトル
2. これまでの数とベクトルの違い
3. ベクトルの取り扱いで注意すべきこと

⁶⁷ 平面ベクトル・空間ベクトルともに，2007年度現在の新旧課程双方で，数学Bに掲載されている．

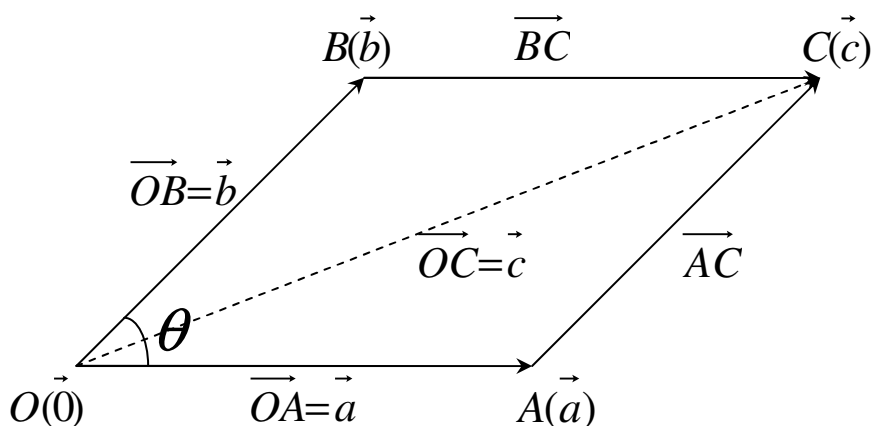
1. ベクトルの定義

1. 1 高校数学のベクトルの復習 (物理学でのベクトル)

高校数学の教科書では、ベクトル(Vector)について以下のように書いている.

- ・ 大きさと向きを持った量 (定義)
- ・ 平面上や空間内の矢印 (有向線分⁶⁸) として幾何学的にイメージされる.

そこで、これらを下の図で説明しよう. 四角形 $OACB$ は平行四辺形であるとする.



= Figure 1 =

ベクトルの定義は先ほど述べたように、大きさと向きを持った量である. ベクトル (や行列) 以外の数 (これをスカラー, scalar という) はこのうち大きさしか表していなかった. 例えば, もし $\vec{OB} = \vec{OA}$ とすれば, スカラーでは当然ながら, $\vec{OB}$ と $\vec{OA}$ は同じものだが, ベクトルではこの二つは明らかに向きが異なるので違うものになる. しかし, ベクトルの世界であっても, 大きさに加え, 向きが同じであれば, 同じ場所に存在しなくても, 同じものとしてすることができる. 例えば, $\vec{OB}$ と $\vec{AC}$ は大きさが同じだが, $\vec{OB} = \vec{AC}$ で考えたとき, 方向も同じだから, $\vec{OB} = \vec{AC}$ とすることができる.

⁶⁸ 有向線分とは, 向きを持った線分のこと.

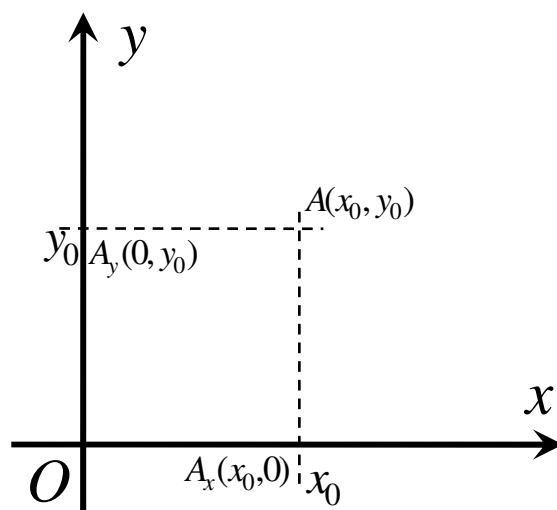
1. 2 新たなベクトル（経済学で使えるベクトル）

1. 1のような物理学的なベクトルに対して、経済学を学習するものはベクトルを以下のように考えれば良い。

・同時に達成するいくつかの値の集合⁶⁹

・値の組み合わせ³

そこで、経済学では座標平面を頻繁に用いて分析するので、以下のような x y 平面⁷⁰の図を用いて説明しよう。



= Figure 2 =

結論からいうと、上の図では、 x_0, y_0 はスカラーであり、 O, A, A_x, A_y がベクトルである。経済学でスカラーといえば、単に値そのものを指す。現に x_0, y_0 それぞれ x, y の値に他ならない。しかし、 O, A, A_x, A_y は座標平面上の点であり、それぞれ、 $(0,0), (x_0, y_0), (x_0, 0), (0, y_0)$ を意味している。まさに、値の組み合わせといえるので、これらはベクトルである。例えば、 $A(x_0, y_0)$ について考えよう。ベクトル A においては、 $x=x_0$ だけでなく、同時に $y=y_0$ も達成されていなければならない。複数の数の値を1つのスカラーでは表示できないが、ベクトルは数

⁶⁹ この意味では、行列もベクトルと同じ。ベクトルは行列の一種ともいえる。

⁷⁰ x y 平面とは、横軸に x の値、縦軸に y の値をとるような座標平面のこと。もし、 y x 平面といえば、縦軸に y 、横軸に x となる。ちなみに、変数が3つ以上になり、 x y z 立方とは、 x y 平面に対し、垂直に z 軸を立てるようなグラフになる。

を組み合わせることができるので、こうした状態を1つのベクトルという数で表すことができるのである。また、 A_x も、れっきとしたベクトルである。確かに、 y の値は0だが、0という数(値)と $x=x_0$ をまとめているわけなので、やはりベクトルに他ならない⁷¹。原点Oも同様である⁷²。1. 1のようにベクトルには必ずしも→をつけなくても良い。特に、経済学ではほとんど使用しない。以降、本書でベクトルと呼んだ場合、こちら(1. 2)のベクトルを指すものとする。

2. これまでの数とベクトルの違い

これまでの数であるスカラーはその値自体にしか情報が存在しないが、1. 2でも述べたように、ベクトルは、数の組み合わせであるので、複数の値がもつ情報を取り入れることができる。その際、いくつかの数値を取り入れるときに、()でくくるが、その際、 (x_0, y_0) のように横に並べてもいいし、 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ のように縦に並べてもいい。前者を行ベクトル(row vector)、後者を列ベクトル(column vector)と呼ぶ。

3. ベクトルの取り扱いで注意すべきこと

ベクトルの取り扱いの際に、最も注意すべきなのは演算である。ベクトルは数の集合体なのだから、ベクトルに対して、演算を行う際には、以下の3点などに注意すべきである。

⁷¹ ちなみに、 A_x や A_y のように、ベクトルを構成する数値のひとつを除いて全てが0であるようなベクトルを基本ベクトルという。

⁷² ベクトルを構成する数値が全て0であるベクトルを零ベクトルという。

- (1) ベクトルの全ての構成要素⁷³に対して、演算を行うこと。その際、各成分が対応しているか、確認すること。
- (2) スカラーでの演算規則と同じようにはいかないこと。
- (3) そもそも演算の際に、その演算に意味があるのか、その成分に演算を行うことに意味があるのかに意識すること。

例えば、A社が保有している労働（Lとする）と資本（Kとする）といった生産要素をベクトル F_A としよう。A社が実際に労働を L_A 、資本を K_A ⁷⁴持っていれば、このベクトルは $F_A=(L_A, K_A)$ と表される。同様にB社が存在し、 $F_B=(L_B, K_B)$ であるとしよう。ここで、A社とB社が合併した場合、それぞれが持っていた生産要素が合計される。この合計の表し方は2通り存在する。従来のスカラーで表すなら、資本 $K=K_A+K_B$ 、労働 $L=L_A+L_B$ となる。但し、2回の表示をしなくてはならない。対して、ベクトルで表そう。すると、生産要素の合計は F_A+F_B と表せる。このとき、その成分は、労働成分と資本成分がそれぞれ左と右の成分になっており対応していて⁷⁵、それぞれ足し合っ、 $(L_A, K_A)+(L_B, K_B)=(L_A+L_B, K_A+K_B)$ となっている。つまり、ベクトル F_A+F_B は (L_A+L_B, K_A+K_B) で生産要素を1つのベクトルという数でに表すことができた。

以上の例は各成分を足し合い、ベクトルの演算を行ったケースであった。このように、四則演算のうち足し算・引き算はそのままできる。しかし、掛け算・割り算になると、そうもいかない。

例えば、経済に財が3種類あるとしよう。財の種類 $i=1,2,3$ であり、価格を p_i 、生産量を q_i と表す。財の価格をベクトル P とし、第1成分⁷⁶から順に第1財、第2財...の価格を並べる。同様に、生産量もベクトル Q として並べる。すると、 $P(p_1, p_2, p_3)$ 、 $Q(q_1, q_2, q_3)$ と表せた。このとき、この経済の総生産額を表すにはどうすればよい？総生産額は、 $p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3$ である。これは、ベクトルでの

⁷³ これを成分(element)と言う。たとえば、Figure2 では、ベクトルAにおいて、 x_0 はx成分、 y_0 はy成分と呼ぶことができる。

⁷⁴ 資本と労働は代表的な生産要素。

⁷⁵ 例えば、ベクトル F_A が (L_A, K_A) でベクトル F_B が (K_B, L_B) であれば、左右の成分が全く質の異なるものであり、このような場合にベクトルの和算を施しても（それ自体は可能であるが）、意味がない。

⁷⁶ 行ベクトルなら左から、列ベクトルなら上から、第1成分、第2成分、...と呼ぶ。

演算ではP Qなのか、ということとは違う。なぜなら、ベクトルは行列の一種で、Pの列数とQの行数が一致する必要があるが、前者は1で後者は3なので、このままでは計算ができない。そこで、ベクトルの積の計算では、しばしば、転置(transpose)という作業を実施する。これは、列数と行数をそろえるために、ベクトルを回転させる。具体的にはQを回転させて、 $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}^{77}$ と表せる。これで、

列数と行数が一致したので、P Qが計算できる。 $(p_1, p_2, p_3) \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3$

となって、求めたいものが求められた。なお、同様に転置してQ Pをしたらどうなるか？ $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} (p_1, p_2, p_3) = \begin{pmatrix} p_1 q_1 & p_2 q_1 & p_3 q_1 \\ p_1 q_2 & p_2 q_2 & p_3 q_2 \\ p_1 q_3 & p_2 q_3 & p_3 q_3 \end{pmatrix}$ となり、全く結果が異なる。また、この

行列が何を表しているのかも分からない。このように、ベクトルの掛け算・割り算の際には要注意だし、演算自体に意味があるのか、よく考えなければならない。

参考文献 ⁷⁸

Michael W. Klein(1997), MATHEMATICAL METHODS for ECONOMICS,
ADDISON WESLEY

伊藤敏雄(2004),「現代物理」, 学術図書出版社

沢田賢(2003),「社会科学の数学」, 朝倉図書

⁷⁷ このように回転させられたベクトルや行列には、 Q^T というふうに“T”をつける。

⁷⁸ 参考文献とは、執筆に当たって引用したり参考にした文献のことで、英語でReferences (Refer:言及する, の派生語) という。「読む際によく分からなければ参考にした方がいい」といったレベルの話ではないので、注意すること。

12 ベクトルの基本性質（岡田）

=目次=

1. 行ベクトル(row vector), 列ベクトル(column vector)
2. ベクトルの演算
3. 1次結合
4. 1次独立, 1次従属

1. 行ベクトル, 列ベクトル

ベクトルは以下の2つに分けることができる.

- ・ 1行のみからなる行列 = 行ベクトル
- ・ 1列のみからなる行列 = 列ベクトル

ベクトルをあらわすときは, アルファベットの小文字の**太字**を用いることが多い.

◆ n次行ベクトル, m次列ベクトル

n次行ベクトルとは, $1 \times n$ 行列のことである.

例えば, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ と表される.

また, m次列ベクトルとは, $m \times 1$ 行列のことである.

よって, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ と表される.

2. ベクトルの演算

行列の演算と同じである.

ベクトルの演算

行列の演算と同じである.

n 次行ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, 実数 u, v に対し, 以下の(1)~(8)が成立する.

- (1) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
- (2) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
- (3) $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$
- (4) $u(v\mathbf{a}) = (uv)\mathbf{a}$
- (5) $(u + v)\mathbf{a} = u\mathbf{a} + v\mathbf{a}$
- (6) $u(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = u\mathbf{a} + u\mathbf{b}$
- (7) $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$
- (8) $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$

以上は, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が n 次列ベクトルであっても成立する.

◆ ベクトルの積 (高校で学んだ内積とは異なるので注意)

2つの行列 A, B に対し, その積 AB を定義するのは「行列 A の列の個数 = 行列 B の行の個数」となる場合に限られていた. ベクトルに関しても同様のことが言える. m 次列ベクトル $\mathbf{b}$ の列の個数も, n 次行ベクトル $\mathbf{a}$ の行の個数は共に 1 である. よって, m 次列ベクトル $\mathbf{b}$, n 次行ベクトル $\mathbf{a}$ に対し, その積 $\mathbf{ba}$ は定義される($\mathbf{ba}$ は $m \times n$ 行列である). $m=n$ のとき, n 次行ベクトル $\mathbf{a}$, m 次列ベクトル $\mathbf{b}$ に対し, その積 $\mathbf{ab}$ は定義される. この $\mathbf{ab}$ は 1×1 行列, すなわちスカラーである.

例：2 次行ベクトル $\mathbf{a}$ ，2 次列ベクトル $\mathbf{b}$

$\mathbf{a} = (3, 4)$ ， $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}$ とあらわされるとき， $\mathbf{ba}$ ， $\mathbf{ab}$ はどうなるか．

$\mathbf{ba}$ は 2×2 行列， $\mathbf{ab}$ はスカラー (1×1 行列)になる．

$$\text{(結果)} \quad \mathbf{ba} = \begin{pmatrix} 27 & 36 \\ 21 & 28 \end{pmatrix} \quad \mathbf{ab} = (3 \cdot 9 + 4 \cdot 7) = (55)$$

3. 1 次結合

n 個のベクトル

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ が与えられたとき， n 個の実数

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ に対して

$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n$ の形にかかれるベクトルを $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ の 1 次結合という．

例：2 個のベクトル

$\mathbf{a}_1 = (1, 2, 3)$
 $\mathbf{a}_2 = (4, 5, 6)$ が与えられたとき，2 個の実数

α_1, α_2 に対して

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 = (1\alpha_1 + 4\alpha_2, 2\alpha_1 + 5\alpha_2, 3\alpha_1 + 6\alpha_2)$$

の形にかかれるベクトルを $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ の 1 次結合という．

4. 1 次独立, 1 次従属

ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ に対して

$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ が成り立つのは

n 個の実数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ が

$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ の場合に限るとき, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ は 1 次独立であるという.

1 次独立でないとき, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ は 1 次従属であるという.

例: 3 個のベクトル

$$\mathbf{a}_1 = (1, 2, 3)$$

$$\mathbf{a}_2 = (4, 5, 6) \quad \text{に対して,}$$

$$\mathbf{a}_3 = (7, 8, 9)$$

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \alpha_3 \mathbf{a}_3 = (1\alpha_1 + 4\alpha_2 + 7\alpha_3, 2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 8\alpha_3, 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 9\alpha_3) = \mathbf{0}$$

これが成り立つのは,

$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ の場合に限らないかどうかを確かめる.

そのためには,

$$\begin{cases} 1\alpha_1 + 4\alpha_2 + 7\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 8\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 9\alpha_3 = 0 \end{cases} \quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \neq 0) \quad \text{を解けばよい.}$$

しかし, これは解くことができない (そもそも 1 次従属だから).

ここで $\alpha_1 = a$ とおくと,

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = (a, -2a, a) \quad (a \in \mathbb{R})$ となるので,

例えば, $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = 1$ のときでも

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \alpha_3 \mathbf{a}_3 = (1\alpha_1 + 4\alpha_2 + 7\alpha_3, 2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 8\alpha_3, 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 9\alpha_3) = \mathbf{0}$$

が成り立つ.

よって, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は 1 次従属であるであることが確かめられた.

◆ 1次独立であることは何を意味するのか

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n = 0 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

上記のような連立方程式があるとする.

このとき, この連立方程式が一意の解を持つかどうかは各方程式の係数をベクトルとした,

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1n}) \\ \mathbf{a}_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{2n}) \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n = (\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \dots, \alpha_{nn}) \end{cases} \quad \text{が 1 次独立ならば,}$$

一意の解を持たないし, 1 次従属ならば, 持たないといえる.

例: 3元連立方程式

$$\begin{cases} x + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x + 5x_2 + 6x_3 = 0 \\ 7x + 8x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{がある.}$$

この連立方程式は一意の解を持つだろうか. それを調べるには, 各方程式の係数をベクトルとして, それらが 1 次独立であるかどうかを確かめればよい.

そこで, $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (4, 5, 6)$, $\mathbf{a}_3 = (7, 8, 9)$ とする.

既に例示したように, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は 1 次従属である. よって, 一意の解を持たないといえる (分からないならば, 上の 3 元連立方程式を解いてみるとよい, 解くことができないはずである).

参考文献

現代経済学の数学基礎(上) A.C.チャン 著 シーエーピー出版
大学で学ぶ 線形代数 沢田賢/渡辺展也/安原晃 共著 サイエンス社
経済数学教室 1 線型代数の基礎 上 小山昭雄 著 岩波書店

13 確率論における基礎知識 (河野)

確率論は大きく2つの分野で使用されると、考えられる。1つは、ミクロ経済学・マクロ経済学における不確実性の選択の箇所である。特に、将来の期待利得を考える際に使用される。もう1つは、計量経済学である。計量経済学は、統計学を基礎に成立しているので、当然の如く、完全に確率論的基礎を理解しておかなくてはならない。

＝目次＝

1. 基本的な用語の使用
2. 論理記号の使用
3. 期待値
4. ベイズの定理

1. 基本的な用語の定義

1. 1 試行 (Trial)

どんな結果が起こるか、偶然に（一定の確率的に）決まるような出来事を起こすことを試行という。実験や観察、くじ、将来の出来事などが例として挙げられる。

1. 2 事象 (Event)

上の試行によって、発生した出来事のことを意味する。例えば、「宝くじが当たるといふこと」とか、「テストで合格すること」などが例として挙げられる。事象は、よく英数字の大文字で表される。例えば、 $A = (\text{テニスの試合に勝利})$ などのようにおくことがある。この事象の記号は、単なる記号に過ぎず、変数や定数のように値をとるものとは全くことなるので注意すること。逆に、集合論で使用される論証は、この事象においても同様に使用できる。

1. 3 同時 (Joint)

2つの事象がどちらも起こるとしよう。例えば、山崎くんと中村くんがいて、

2人がそれぞれ所得を得る。このとき、山崎くんと中村くんの両方が1000万円の所得を得た。このような場合を、確率論では、「同時に」起きたという。つまり、確率論の言う「同時」とは、時間軸的に“ぴったし同時に”などという意味とは全く異なる。単に、両方の出来事が起きたということを指す。

1. 4 背反

背反は逆に、同時に起こりえないことを指す。例えば、「明日のあるテストで川浦さんが70点をとる」ということと、同じ「明日のあるテストで川浦さんが40点をとる」ということは、背反と言える。

1. 5 独立 (Independent)

ある事象の発生（試行）が別の事象の発生（試行）に影響を与えないとしよう。そのようなとき、それらの事象（試行）は「独立である」と呼ぶ。

例えば、箱があって、その中に当たりのボールとハズレのボールがあるとしよう。ボールをとるという事象を行い、当たりかハズレか確認するわけだが、まず、取ったボールは箱に戻して次の試行を続けて行うとしよう。このとき、 n 回目の試行の際に当たりかハズレかによって、 $n+1$ 回目の試行で当たり・ハズレの確率は変化する。これは独立とは言えない（従属：dependent という）。逆に、取ったボールは箱に戻さずに次の試行を続けて行うとしよう。この場合、 n 回目の試行も m 回目の試行も、ボールの中にある当たり・ハズレのボールの数は不変なので、どちらも当たり・ハズレの確率は変化しない。この場合、 n 回目と m 回目に出る事象は独立であると言える。

2. 論理記号の使用

2. 1 確率への事象の導入（コルモゴロフの公理⁷⁹）

- $P(A)$ ：事象 A が発生する確率（Probability）を指す。他は、 $\text{Prob}(A)$ や $\text{Pr}(A)$ など表す場合もある。必ず、 $0 \leq P(A) \leq 1$ ($\forall A$) となる。
- 例1：全事象（起こりうる全ての事象）を U ，空事象（何も起こらない事象）を、 φ とする。このとき、 $P(U)=1$ ， $P(\varphi)=0$ となる。

⁷⁹ Kolmogorov axioms

例 2 : $P(A \cap B)$ は, 「事象 A と事象 B が同時に発生する確率」を指す. 逆に, $P(A \cup B)$ は, 「事象 A と事象 B の少なくとも一方 (両方起きてもよい) が発生する確率」を指す.

2. 2 確率の加法性と背反

例えば, 集合論では,

$$A \cup B = A + B - A \cap B \quad (\forall A, B).$$

同様な話は, 確率論においても言え,

$$\underline{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (\forall A, B).} \quad (2.2.1)$$

ここで背反であるときを考えよう.

$$\text{事象 } A \text{ と事象 } B \text{ が背反} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(\phi) = 0$$

より, これに(2.2.1)を代入すれば,

$$\underline{P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (\forall A, B)}^{80}$$

となる. 事象が 3 つ以上の場合でも同様である. つまり, $P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$

2. 3 余事象とその応用

- 定義 : ある事象に対して, その事象が起きないという事象を考える. その事象を余事象といい, 例えば, 事象 A の余事象は, $\bar{A}$ と表される. ちなみに, A と $\bar{A}$ は明らかに背反である.

一般に集合論では,

$$A + \bar{A} = U \quad (\forall A).$$

$$\text{よって,} \quad P(A) + P(\bar{A}) = P(U) = 1 \quad (\forall A). \quad (2.3.1)$$

⁸⁰ (別解) A と B が背反 $\Leftrightarrow A + B = A \cup B \Leftrightarrow P(A) + P(B) = P(A \cup B)$

- 例 3 : 事象 A と事象 B の少なくとも一方が発生する確率

$$(2.3.1) \quad \Rightarrow \quad P(A \cup B) + P(\overline{A \cup B}) = 1 \quad (2.3.2)$$

$$\text{ド・モルガンの法則}^{81} : \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad (2.3.3)$$

(2.3.2)に(2.3.3)を代入すると,

$$P(A \cup B) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}).$$

「少なくとも一方が発生する確率」というのは求めにくいですが, その否定を考えることによって, 若干容易に求められるようになる場合がある.

2. 4 独立

例えば, 事象 A と事象 B が独立であれば,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

となる. 事象が 3 つ以上の場合でも同様である. つまり, $P(\cap_i A_i) = \prod_i P(A_i)$.

2. 5 条件付確率 (Conditional Probability)

- 定義 : 事象 A と事象 B が存在する. このとき, 事象 A がすでに起きている時点での事象 B が起こる確率を, A が起こったときの B の条件付確率といい, $P_A(B)$ や $P(B|A)$ などと表す.
- 例 4 : 岡田くんと渡辺くんの出席率

		渡辺		合計
		出席	欠席	
岡田	出席	0.05	0.55	0.6
	欠席	0.25	0.15	0.4
合計		0.3	0.7	1.0

⁸¹ De Morgan's law

ここで、岡田くんが出席する事象を A 、渡辺くんが出席する事象を B とする。つまり、それぞれが欠席する事象は、 $\bar{A}, \bar{B}$ となる。上の表から、 $P(A)=0.6$ 、 $P(\bar{A})=0.4$ 、 $P(B)=0.3$ 、 $P(\bar{B})=0.7$ となる。しかし、表をよく見ると、 A と B は独立でない。独立であれば、 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ だが、 $P(A \cap B)=0.05$ であり、 $P(A)P(B)=0.18$ と一致しない。つまり、従属しているのである。岡田くんは本来、6 : 4 の確率で出席 : 欠席だが、渡辺くんが出席しているときに限れば、1 : 5 割合でしか、出席していない。つまり、渡辺くんが出席するという条件で、岡田くんが出席する確率 : $P(B|A)$ は $1/6$ だと言える。渡辺くんにおいても同様に考えることができる。 $1/6$ は、 $0.05/0.3$ 、つまり、 $P(A \cap B)/P(A)$ で求められた。

- 定理 : 条件付確率の通常確率 (Unconditional Probability) への変換

$$\underline{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}} \quad (2.5.1)$$

もし、 A と B が独立であれば、 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ($\because$ 2. 4) より、

$$P(B|A) = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} \Leftrightarrow \underline{P(B|A) = P(B)}.$$

- 例 5 : $P(A \cap B)$ の求め方

以下の 4 通りが考えられる。

一般的には、以下が成立する。

$$(2.3.1) \quad \underline{\Rightarrow P(A \cap B) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B})}$$

$$(2.2.1) \quad \underline{\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)}$$

$$(2.5.1) \quad \underline{\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(B|A)P(A)}$$

もし、 A と B が独立であれば、

$$\underline{P(A \cap B) = P(A)P(B)} \quad (\because \text{2. 4}).$$

3. 期待値

3. 1 確率変数

- 定義：確率変数（Random variable）とは，ある値をとることが事象になるような変数のことをいう．

つまり，実際にどんな値をとるか，偶然に（一定の確率的に）決まる変数のことを指す．例えば，「明日行われる試験の点数」や「じゃけんを6回行い，その中で勝利する数」などが該当する．ここで注意すべきことは，確率変数は値をとりうる変数であるのであって，確率自体ではない．確率変数と確率の対応関係を確率分布（Probability distribution）⁸²という．

- 例6：あるダーツゲームにおいて，藤代さんと城さんの各得点

藤代				城			
得点	0	5	20	得点	0	5	20
確率	0.5	0.2	0.3	確率	0.3	0.6	0.1

この表における得点は，確率的に定まっているので，確率変数と言える．また，この表自体も，確率変数と確率の対応関係を示すので，確率分布と言える．

確率変数は文字でおくことが多いので，実践してみよう．藤代さんの得点を， X とする． $X=0,5,20$ となる．ここで， X かそれぞれの値（実現値という）をとるときの確率はどのように表されるか？確率変数の定義に基づけば，値をとること，すなわち， $X=0$ ， $X=5$ ， $X=20$ それぞれが事象になる．よって，2. 1における確率の表記の仕方によれば， $P(X=0)=0.5$ ， $P(X=5)=0.2$ ， $P(X=20)=0.3$ が確率である．

次に，城さんの確率変数を X とおくことはできるだろうか？藤代さんと城さんのケースを一つの問題として考える場合，基本的には文字を変えるべきである．なぜならば，藤代さんと城さんは異なる確率分布（つまり表）をとる

⁸² 複数の確率変数（事象）の組と確率の関係を表したものを同時分布（Joint distribution）という．例えば，例4の表がそれに当たる．

からである．よって，例えば，城さんの確率変数を Y とおいて， $Y=0,5,20$ となる． $X=0,5,20$ で実現値は同じだが， $P(Y=0)=0.3$ ， $P(Y=5)=0.6$ ， $P(Y=20)=0.1$ となり確率分布が異なるため，意味合いが違ってしまいますので，違う文字にすべきである．

3. 2 期待値の定義

- 以下，確率変数 X の期待値を考える．実現値は n 個存在し， $X = x_1, x_2, \dots, x_n$ とする．通常，確率変数は大文字，実現値は小文字で表す．

- 定義：確率変数 $X = x_1, x_2, \dots, x_n$ の期待値（Expectation）を $E(X)$ と表し，

$$E(X) = P(X = x_1)x_1 + P(X = x_2)x_2 + \dots + P(X = x_n)x_n$$

となる．つまり， $E(X) = \sum_{i=1}^n P(X = x_i)x_i$ と書ける．このとき，確率の総和の

$P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_n) = 1$ ，つまり， $\sum_{i=1}^n P(X = x_i) = 1$ であることに注意すること．

- 例 7：あるダーツゲームにおいて，藤代さんと城さんの各得点

藤代				城			
得点	0	5	20	得点	0	5	20
確率	0.5	0.2	0.3	確率	0.3	0.6	0.1

藤代さんと城さんの確率変数をそれぞれ X, Y とする．

$$\begin{aligned}
 E(X) &= P(X = 0) \cdot 0 + P(X = 5) \cdot 5 + P(X = 20) \cdot 20 \\
 &= 0.5 \cdot 0 + 0.2 \cdot 5 + 0.3 \cdot 20 \\
 &= 7
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= P(Y = 0) \cdot 0 + P(Y = 5) \cdot 5 + P(Y = 20) \cdot 20 \\
 &= 0.3 \cdot 0 + 0.6 \cdot 5 + 0.1 \cdot 20 \\
 &= 5
 \end{aligned}$$

となる．

4. ベイズの定理

4. 1 2 事象のケース

(2.5.1)より, 条件付確率の定義は,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(B|A)P(A).$$

同様に,
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A|B)P(B).$$

よって,
$$P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B) \quad \text{となるので,}$$

つまり,
$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}. \quad (4.1.1)$$

これをベイズの定理⁸³という.

● 例 8 : 予防接種

ある国民病に対する予防接種 (例えば, 結核に対する BCG 接種とツベルクリン反応のようなもの) を考える. この予防接種をしなければ子供のうちに必ず感染してしまうとする. そこで, 生まれてすぐ行われる予防接種の後に実施される検査では, 陽性か陰性の反応を示す. 予防接種された人が成年したのちに行われる調査によって, 病気にかからなかった人には高い割合で, その検査で陽性が出ていたことが分かった. 具体的に, 病気にかからなかった人が全体の 78%, 検査で陽性だった人が全体の 72%, 病気にかからなかった人の中から陽性だった人の割合が 90%となっている. この結果から, この検査で陽性であるときに予防接種で免疫がついている確率を求めよう.

ここで, 病気にかからない, つまり, 免疫がついているという事象を A , 検査で陽性である事象を B とする. すなわち, $P(A)=0.78$, $P(B)=0.72$, $P(B|A)=0.90$ となる. ベイズの定理より,

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{0.90 \times 0.78}{0.72} = 0.975$$

なので, 求める確率, すなわち, 陽性であるときに免疫がついている確率は 97.5% だと判断できる.

⁸³ Bayes' theorem, Bayes' rule

ちなみに、今回のケース（2事象の場合）では以下のような同時分布の表を描くことでも求めることができる⁸⁴。

	陽性	陰性	合計
成功	0.70	0.08	0.78
失敗	0.02	0.20	0.22
合計	0.72	0.28	1.00

4. 2 3事象のケース

全事象 U を互いに背反な2つの事象である A_1, A_2 に分割する。

つまり、 $U = A_1 + A_2 \Leftrightarrow U \cap B = A_1 \cap B + A_2 \cap B$ 。

$$\Leftrightarrow P(U \cap B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)$$

$$\Leftrightarrow P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B). \quad (4.2.1)$$

(4.1.1)のベイズの定理を $P(A_1 | B)$ に適用し、

$$P(A_1 | B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)}. \quad (4.2.2)$$

(2.5.1)の条件付確率の定義から、

$$P(B | A_1) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(A_1)} \Leftrightarrow P(A_1 \cap B) = P(B | A_1)P(A_1). \quad (4.2.3)$$

$$\text{同様に、} \quad P(A_2 \cap B) = P(B | A_2)P(A_2). \quad (4.2.4)$$

(4.2.1)を(4.2.2)に代入すると、

$$P(A_1 | B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)}.$$

これに、(4.2.3)と(4.2.4)を代入すると、

$$P(A_1 | B) = \frac{P(B | A_1)P(A_1)}{P(B | A_1)P(A_1) + P(B | A_2)P(A_2)} \quad (\text{但し、} U = A_1 + A_2).$$

$$\text{よって、} \quad P(A_j | B) = \frac{P(B | A_j)P(A_j)}{P(B | A_1)P(A_1) + P(B | A_2)P(A_2)} \quad (j=1,2, U = A_1 + A_2) \quad (4.2.5)$$

$$\text{となり、または、} \quad P(A_j | B) = \frac{P(B | A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^2 P(B | A_i)P(A_i)} \quad (j=1,2) \text{とも書ける。} \quad (4.2.6)$$

これが、3事象の場合のベイズの定理となる。

⁸⁴ $P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.70}{0.72} = 0.972 \div 0.975$

● 例 9 : ウソ発見器

世の中に犯罪者が 5% 存在しているとする。いま、世の中の人を無作為抽出し、ウソを言っているという兆候が現れたらアラームが鳴るように設計されているウソ発見器をかけたところ、犯罪者では 90%、一般人（犯罪者以外の全ての人）では 10% の確率でアラームが鳴るものとする。一見すると、このウソ発見器の精度は高そうである。このとき、この検査でアラームが鳴った者が犯罪者である確率を求めよう。

そこで、犯罪者がウソ発見器にかけられる事象を A_1 、一般人がウソ発見器にかけられる事象を A_2 、アラームが鳴る事象を B とする。よって、求める確率は、 $P(A_1 | B)$ であり、 $P(A_1) = 0.05, P(A_2) = 0.95, P(B | A_1) = 0.9, P(B | A_2) = 0.1$ となる。

(4.2.5) のベイズの定理に $j=1$ を代入すると、

$$P(A_1 | B) = \frac{P(B | A_1)P(A_1)}{P(B | A_1)P(A_1) + P(B | A_2)P(A_2)}$$

左辺に必要な確率を代入して、

$$P(A_1 | B) = \frac{0.9 \times 0.05}{0.9 \times 0.05 + 0.1 \times 0.95} = \frac{0.045}{0.045 + 0.095} = \frac{0.045}{0.140} \doteq 0.32$$

よって、アラームが鳴った者が犯罪者である確率は 32% である。このように一見すると、精度が高そうだったが、圧倒的多数が一般人であるため、ウソ発見器が、犯罪者を見つける精度は低くなってしまうことが分かる。

4. 3 多事象のケース

全事象 U を互いに背反な事象である $A_1, A_2, \dots, A_n$ に分割すれば、(4.2.6) より、

$$P(A_j | B) = \frac{P(B | A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^n P(B | A_i)P(A_i)} \quad \left(j = 1, 2, \dots, n \mid U = \sum_{i=1}^n A_i \right)$$

となる。証明は、4. 2 と同様に成される。

14 経済数学単語集（我妻）

英語	日本語
abscissa	横軸，横座標
antiderivative	不定積分
argument of the function	関数の独立変数
asymptote vertical	漸近線
autonomous	独立，自主的
average	平均
aversion	回避
behavioral equation	行動方程式
bivariate functions	二変数関数
bond Price volatility and bond maturity	債券価格変動と社債満期
calculus	微積
differential calculus	微分法
integral calculus	積分法
calculus of variations	変分法
Cartesian plane	デカルト平面
chain rule for multivariate functions	多変量関数に対する連鎖法則
characteristic equation	特性方程式
characteristic polynomial	特性方程式
characteristic root	固有値
characteristic vector	固有ベクトル
Cobb-Douglas production function intensive	コブ・ダグラス型生産関数
coefficient of relative risk aversion	相対リスク回避の係数
cofactor	余因数
cofactor expansion	余因数展開
comparative static analysis	比較静学分析
comparative statics	比較静学
concave	凹面
strictly concave	狭義の凹面
concave function	凹関数
concavity	凹面

constant-valued function rule of differentiation	微分の等価値関数法則
constrained optimization	条件付最適化
constraints	制約
equality constraints	平等な制約
inequality constraints	不平等制約
consumer's surplus	消費者余剰
continuous	持続的
control variable	制御変数
convex	凸
strictly convex	狭義の凸面
convex function stationary point in	凸関数の
cost functions	費用関数
covariance	共分散
Cramer's Rule	クラメールの公式
critical Point	臨界点
cumulative distribution function	累積分布関数
definition	定義
derivative	導関数，微分係数
partial derivative	偏導関数
second derivative	二次導関数
determinant	行列式
determinant of a 2×2 matrix	2 行 2 列行列
determinant of a 3×3 matrix	3 行 3 列行列
difference equations	差分方程式
equilibrium value difference equation	均衡値差分方程式
first order difference equation	一次差分方程式
forward solution difference equation	順解差分方程式
general solution difference equation	一般解差分方程式
homogeneous equation difference equation	同次差分方程式
initial values difference equation	初期値の差分方程式
long-run value difference equation	長期的価値の差分方程式
monotonic dynamics difference equation	単調動学の差分方程式
oscillatory dynamics difference equation	振動動学の差分方程式
particular solution difference equation	特殊解の差分方程式
second order difference equation	二次差分方程式

solution difference equation	差分方程式
stable difference equation	静学の差分方程式
stationary value difference equation	停留値の差分方程式
steady state difference equation	定常状態の差分方程式
system of difference equation	差分方程式の形式
unstable difference equation	不安定差分方程式
difference equations	差分方程式
difference quotient	差分係数
differential	微分
second differential	二階微分
second total differential	二階全微分
total differential	全微分
differential calculus	微分法
differential equation	微分方程式
forward solution	順問題解
general solution	一般解
systems of differential equation	微分方程式のしくみ
differential equations	微分方程式
diminishing marginal utility	限界効用の逓減
discrete time analysis	離散時間型分析
discrimination	区別，識別
division of national income	歳入の分配
domain	変域，定義域
doubling time	倍化時間，倍増期間
dummy variable	ダミー変数
duopolist strategic behavior of	寡占戦略行動
dynamic analysis	動的分析
dynamic Lagrange multiplier	動的ラグランジュ乗数
dynamic optimization	動的最適化
econometric specification	計量経済学の規格
eigenvalue	固有値
eigenvector	固有値
elasticity	弾力性
arc elasticity	弧弾力性
point elasticity	点弾力性

elements of a set	集合の要素
envelope theorem	包絡線定理
equilibrium	均衡
equilibrium condition	均衡状態
equilibrium values	均衡価値
Euler's equation	オイラー方程式
Euler's theorem	オイラーの定理
exchange-rate determination monetary	金融（通貨）決定の変化率
exponent rules of	指数法則
exponential e	自然対数
exponential function rule of differentiation	微分の指数関数法則
exponents rules of	指数法則
extreme value	極値
extreme values	極値
factorial	階乗の
feasible set	実現可能集合
first order condition	一次状態
first order condition multi variate	一次状態の多変量
forty-five degree line	45 度線
Freeman Richard	フリーマン リチャード
function	関数
affine function	アフィン関数
bivariate function	二変数関数
composite function	合成関数
concave function	凹関数
convex function	凸関数
cubic function	三次関数
decreasing function	減少関数
differentiable function	微分可能関数
differentiable univariate function	微分不可能関数
exponential function	指数関数
homogeneous function	同次関数
homothetic function	相似関数
implicit function	陰関数
increasing function	増加関数

inverse function	逆関数
linear function	一次関数
log-linear function	対数線形関数
monotonic function	単調関数
multivariate function	多変量関数
non-monotonic function	非単調関数
one-to-one function	相関関数
power function	べき関数
quadratic function	二次関数
strictly decreasing function	狭義減少関数
strictly increasing function	狭義増加関数
strictly monotonic function	狭義単調関数
univariate function	一変量関数
univariate polynomial function	一変量多項式関数
functions	関数
fundamental theorem of calculus	微積の基礎定理, 基礎法則
graph	グラフ
growth accounting	成長会計
growth formula	成長式
growth rate instantaneous	瞬間的成長率
growth rates	成長率
Hamiltonian	ハミルトン
current-value	現行価値
Hessian matrix	ヘッシアン行列
homogeneous function	同次関数
linear homogeneity	線形同次
hyperinflation model	ハイパーインフレモデル
hyperinflations	ハイパーインフレ
implicit function theorem	陰関数の定理
indifference curve	無差別曲線
infinite horizon dynamic problem	無限区間動的問題
inflation cost of	インフレコスト
inflation tax	インフレ税
integer	整数値
integral	積分

definite	限定
evaluating a definite integral	定積分
indefinite	不定
improper	不適正
Riemann	リーマン
integrand	被積分関数
integration	積分
by parts	部分積分
constant of	積分定数
of exponential functions	指数関数積分
power rule	乗則積分
substitution	代替
intercept	切片
interest rates annual and effective	金利
interval	区間
closed interval	閉空間
half-closed interval	半閉空間
half-open interval	半開空間
infinite interval	無限区間
open interval	開空間
inverse matrix	逆行列
isoquant	等量
Lagrange multiplier	ラグランジュの未定係数法
interpretation of its value	価値解釈
Lagrange multiplier method	ラグランジュの乗数法
Lagrangian function	ラグランジュ関数
with multiple constraints	多数制約下のラグランジュ関数
Laplace expansion	ラプラス拡大
leading principal minors	主座小行列式
level curves	等高線
limit	限界
left-hand limit	左極限值
right-hand limit	右極限值
linear algebra	線形代数
linearization	線形化，線形近似

logarithmic function	対数関数
logarithmic transformation	対数変換
logarithms	対数
common logarithms	常用対数
natural logarithms	自然対数
mapping	写像
marginal productivity diminishing	限界生産量の逓減
matrix	行列
commutative law of addition matrix	加法の交換法則行列
commutative law of multiplication matrix	乗法の交換法則行列
diagonal matrix	対角行列
diagonal elements matrix	対角要素行列
dimension of matrix	行列の次元
elements matrix	要素行列
identity matrix	恒等行列
invertible matrix	可逆行列
multiplication by a scalar matrix	スカラー倍行列
negative definite matrix	負値定符号行列
nonsingular matrix	正則行列
off-diagonal elements matrix	非対角行列
positive definite matrix	正定値行列
positive semidefinite matrix	非負定値行列
square matrix	正方行列
transpose of matrix	行列の転置
triangular matrix	三角行列
zero matrix	ゼロ行列
matrix algebra	行列代数
maximum	最大値
maximum principle	最大値原理
maximum value function	最大価値関数
mean	平均値
Mean value Theorem for definite Integrals	定積分平均値の定理
minimum	最小値
local	地域的な
min-max rule for definite integrals	定積分のミニマックス定理

minor	小行列式
multivariate function	多変量関数
necessary and sufficient conditions	必要十分条件
negative definite	負値定符号行列
non-autonomous	非自律系
nonhomogeneous	非同次
numbers	数字
irrational numbers	無理数
rational numbers	有理数
real numbers	実数
objective function	目的関数
optimal control theory	最適制御理論
optimal time problem	最適時間問題
ordered pair	順序対
ordinary least squares (OLS)	最小二乗推定法
ordinate	縦座標
parameter	変数, パラメーター
parameters	変数, パラメーター
partial derivative	偏導関数
cross partial derivative	交差変動関数
second partial derivative	二次変動関数
percentage change	変化率
phase diagram	相平衡状態図, 相図
piecewise continuous	区分的に連続した
piecewise differentiable	区分的に離れた
pollution levels and income	汚染度と所得
polynomial degree of	多項式の次数
positive definite	正の定符号
premultiplied	左から掛けられた
present value	現在価値
with continuous compounding	連続複利計算をした現在価値
probability distribution	確率分布
exponential probability distribution	指数の確率分布
uniform probability distribution	一様確率分布
probability distribution function	確率分布関数

production function	CES 生産関数
constant elasticity of substitution(CES)	
product rule of differentiation	微分の生産法則
proportional change	変化量
quadratic form	二次形式
quadratic formula	二次方程式の解の公式
quotient rule	指数法則
derivative of natural logarithmic function	自然対数関数の導関数
general natural logarithmic function	一般自然対数関数
logarithmic function	対数関数
natural logarithmic function	自然対数関数
random variable	確立変数
range	範囲
rate of change average	平均変化率
instantaneous	瞬間
rational expectations	合理的期待
reaction function	反応関数
reflection	反射
relationship	関係
Richter scale	リヒター値
roots	ルート
Rule of 70	70の法則
saddle point	鞍点
saddle point of multivariate function	多変量関数の鞍点
scalar	スカラー
scalar rule of differentiation	微分のスカラー法則
scholarship rules and savings	奨学金制度と貯金
secant line	割線
second-order condition	二階の条件
bivariate function	二変数関数
seigniorage	特権, 利益
semi-log specification	片対数指定
sequence	連続
bounded sequence	有界列
set	集合

shadow price	潜在価格
slope	傾き
solution	解
state variable	状態変数
stationary point	停留点
steady state	定常状態
stock price determination	株価の決定
Stolper-Samuelson effect	ストルパー・サミュエルソン効果
strategic trade policy	戦略的貿易政策
subjective discount rate	主観的割引率
sufficient conditions	十分条件
summation operator	総和差要素
sustainability of deficits	赤字の持続
tax incidence of	税負担
time path graphing using logarithms	対数関数を使った時系列のグラフ
trace	図形, 線
transformation	変形
transversality condition	横断条件
utility function	効用関数
logarithmic	対数
risk aversion	リスク回避
square root	二乗根
value marginal product of labor	労働の限界生産性
variable	変数
dependent variable	従属変数
endogenous variable	内生変数
exogenous variable	外生変数
qualitative variable	質的変数
quantitative variable	量的変数
variables	変数
variable of integration	積分変数
variance	分散
vector	ベクトル
column vector	列ベクトル
row vector	行ベクトル

付録1 数列

数列の基本公式

① Σ の意味

$$0. \quad S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n^{85}$$

② 等差数列 a_n について

$$1. \quad \text{一般項: } a_n = a_1 + d(n-1) \quad (d \text{ は公差})$$

$$2. \quad \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}\} \Leftrightarrow 2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$$

$$3. \quad S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \{a_1 + d(k-1)\} = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n) \quad (a_n \text{ は末項})$$

$$4. \quad S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \{a_1 + d(k-1)\} = \frac{1}{2}n\{2a_1 + d(n-1)\}$$

③ 等比数列 a_n について

$$5. \quad \text{一般項: } a_n = a_1 r^{n-1} \quad (r \text{ は公比})$$

⁸⁵ 日本語の「合計」のことを英語で **Summation** というが、ラテン文字の S はもともと、ギリシア文字 Σ であった。数学で Σ は **Summation** を表す。使い方：数列 $\{a_k\}_{k=1}^n$ において、各項の和を $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$ と表す。必ずしも必要ではないが、 Σ の上に末項、下に初項の数を項数を一般的に表す文字と = で結び、表示する。

$$6. \quad \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}\} \Leftrightarrow a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$$

$$7. \quad S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_1 r^{n-1} = a_1 \frac{1-r^n}{1-r} = a_1 \frac{r^n-1}{r-1} \quad (r \neq 1)$$

④ Σ 関連の公式

$$8. \quad \sum_{k=1}^n c = c \sum_{k=1}^n 1 = nc$$

$$9. \quad \sum_{k=1}^n 1 = \sum_{k=1}^n 1 = n$$

$$10. \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$11. \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$12. \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$

$$13. \quad \sum_{k=1}^n ar^{n-1} = a \frac{1-r^n}{1-r}$$

$$14. \quad \sum (pa_k + qb_k) = \sum pa_k + \sum qb_k = p \sum a_k + q \sum b_k$$

⑤ その他

$$15. \quad \text{階差数列 } b_n = a_{n+1} - a_n \text{ のとき, } a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad (k \geq 2, k \in N)$$

$$16. \quad S_1 = a_1, a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

等差数列の練習

$$\left[a_n = a_1 + d(n-1) \cdot S_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n) \right]$$

等差数列・・・隣り合う項の差が一定な数列

第1項（初項）を a_1 とし、隣り合う項の差（公差）を d とおくと、

第 n 項目の数（ a_n ）は、

$a_n = a_1 + d(n-1)$ で表すことができ、第1項から第 n 項までの総和（ S_n ）は、

$S_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n)$ で表すことができる。（ちなみに $a_1 = S_1$ ）

例題1 次の数列について以下の各問に答えなさい。

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15,

①この数列の第 n 項 及び 第20項 を求めなさい。

②この数列の第1項から第 n 項までの合計 及び 第1項から第20項までの合計を求めなさい。

<解答>（※_____部は記述する必要はない。）

①第 n 項目の数を a_n , 公差を d とおくと、 初項： $a_1 = 1$, 公差： $d = 2$

よって $a_n = a_1 + d(n-1)$ より $a_1 = 1$, $d = 2$ をこれに代入すると、

$$a_n = 1 + 2(n-1) = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$$

$$\therefore \text{第 } n \text{ 項 : } a_n = 2n - 1$$

また、 $a_n = 2n - 1$ に $n = 20$ を代入すると、 $a_{20} = 2 \cdot 20 - 1 = 39$

$$\therefore \text{第 } 20 \text{ 項 : } a_{20} = 39$$

②第1項から第 n 項までの合計を S_n とおくと、

$S_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n)$ より これに $a_1 = 1$, ①の $a_n = 2n - 1$ を代入すると、

$$S_n = \frac{1}{2}n(1 + 2n - 1) = \frac{1}{2}n(2n) = n^2 \therefore \text{第 } 1 \text{ 項から第 } n \text{ 項までの合計 : } S_n = n^2$$

また、 $S_n = n^2$ に $n = 20$ を代入すると、 $S_{20} = 20^2 = 400$

$$\therefore \text{第 } 1 \text{ 項から第 } 20 \text{ 項までの合計 : } S_{20} = 400$$

練習 1 次の数列について以下の各問に答えなさい.

5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26,

- ①この数列の第 n 項 及び 第 15 項 を求めなさい.
- ②この数列の第 1 項から第 n 項までの合計 及び 第 1 項から第 50 項までの合計を求めなさい.

練習 2 次の数列について以下の各問に答えなさい.

11, 6, 1, -4, -9, -14, -19, -24,

- ①この数列の第 n 項 及び 第 100 項 を求めなさい.
- ②この数列の第 1 項から第 n 項までの合計 及び 第 1 項から第 100 項までの合計を求めなさい.

数列の練習問題

1. $\{2, 6, 18, 54, \dots\}$ この数列の第 1 項から第 n 項までの合計を求めなさい.
2. $\sum_{k=1}^n a_k$ の意味を述べよ.
3. $\sum_{k=1}^n k$, $\sum_{k=1}^n k^2$, $\sum_{k=1}^n k^3$ を Σ を使わずに表せ.
4. $\sum_{k=1}^5 (3k^2 - 6k + 3)$ の値を求めよ.
5. $\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k 2$ を Σ を使わずに表せ.
6. $\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k k$ を Σ を使わずに表せ.
7. $\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k n$ を Σ を使わずに表せ.
8. a_n を S_n で表せ.

付録2 三角比

<三角関数の復習>

① 覚えるべき直角三角形の種類

(1) $2:1:\sqrt{3}$ このとき直角以外の角度は, 30° , 60°

(2) $1:1:\sqrt{2}$ このとき直角以外の角度は, 45° , 45°

→直角二等辺三角形

(3) $3:4:5$

(4) $5:12:13$

→ $\cos$, $\sin$, $\tan$ の値が分からなくなったら, 以上を使って単位円で書けば良い. (少なくとも 30° , 45° , 60° が知っていればなんとかなる.)

② 公式集 (よく使うもの)

$$1. \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad (\star)$$

$$2. \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (\star)$$

$$3. 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (1. \ 2 \text{ から導ける})$$

$$4. \sin(90^\circ - x) = \cos x \quad \cos(90^\circ - x) = \sin x \quad (\text{単位円を書いて導ける})$$

$$5. \sin(90^\circ + x) = \cos x \quad \cos(90^\circ + x) = -\sin x \quad (\text{単位円を書いて導ける})$$

$$6. \sin(180^\circ - x) = \sin x \quad \cos(180^\circ - x) = -\cos x \quad (\text{単位円を書いて導ける})$$

$$7. \sin(180^\circ + x) = -\sin x \quad \cos(180^\circ + x) = -\cos x$$

$$8. \text{余弦定理} (\square) \quad (\text{以下のどちらか覚えていれば何とかなる})$$

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{cases}$$

9. 正弦定理 (☆) 外接円の半径を R とすると,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

10. 加法定理 (☆)

$$\begin{cases} \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x \\ \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\ \tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} \end{cases}$$

11. 2 倍角, 3 倍角の公式 (最悪, 加法定理から導ける)

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

12. 半角の公式 (最悪, 2 倍角の公式から導ける)

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

13. 積和の公式や和積の公式は, 加法定理から導き出すこと!!
(暗記すべきでない)

14. 三角形の面積: $\Delta ABC = \frac{1}{2}bc \sin A$ (☆)

15. 内接円の半径を r とすると, $\Delta ABC = \frac{1}{2}r(a+b+c)$ (図で分かる)

1 6 . 合成

$$\begin{aligned}a \sin x + b \cos x &= \sqrt{a^2 + b^2} \left\{ \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right\} \\&= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \alpha \sin x + \sin \alpha \cos x) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin (x + \alpha) \\&\quad \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \alpha, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \alpha \text{ とする. } \right)\end{aligned}$$

1 7 . 一般角 $x = \alpha + 360^\circ \times n \quad (n \in \mathbb{Z})$

その他

- ・ 球の半径を r とすると,

$$\text{表面積} : S = 4\pi r^2$$

$$\text{体積} : V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

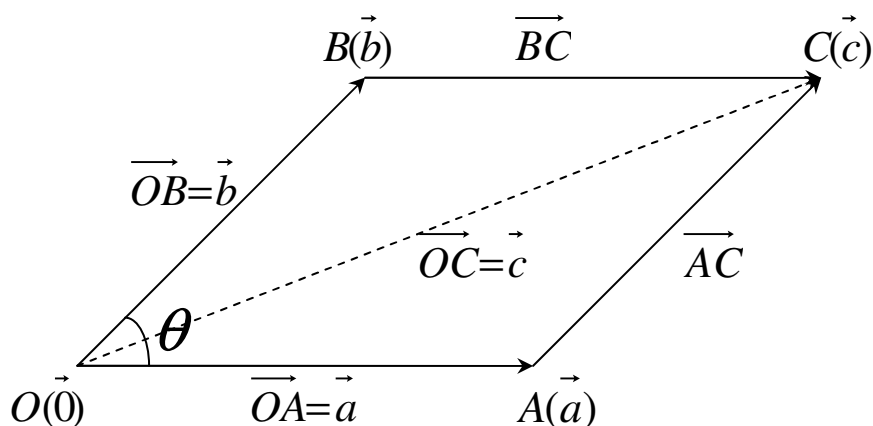
- ・ 相似比を $x : y$ とすると

$$\text{面積比} \quad x^2 : y^2 \quad / \quad \text{体積比} \quad x^3 : y^3$$

付録3 ベクトルの基本公式

以下、高校数学の範囲を含めたベクトル公式の紹介を行う。

1. 基本的なベクトル公式 (下の図に限った話ではない)



$$\textcircled{1} \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$$

(ベクトルは間にポイントを入れて分解できる)

$$\textcircled{2} \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \quad (\text{ベクトルは位置ベクトルの差に分解できる})$$

$$\textcircled{3} OB = AC \cap OB \parallel AC \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC}$$

(平行で長さが同じであれば、ベクトル量は等しい)

$$\textcircled{4} \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{BO} \quad (\text{互いに逆ベクトル})$$

$$\textcircled{5} |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{BO}| = OB \quad (\text{ベクトルの絶対値は線分の長さ})$$

$$\textcircled{6} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cos \angle BOA \quad (\angle BOA = \theta)$$

$$\textcircled{7} \overrightarrow{AA} = \vec{0} \quad (\text{零ベクトル})$$

2. ベクトルの演算公式 ($u, v \in R$ (スカラー) であり, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ をベクトルとする)

$$\textcircled{1} \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

$$\textcircled{2} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$$

$$\textcircled{3} \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$$

$$\textcircled{4} u(v\mathbf{a}) = (uv)\mathbf{a}$$

$$\textcircled{5} (u + v)\mathbf{a} = u\mathbf{a} + v\mathbf{a}$$

$$\textcircled{6} u(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = u\mathbf{a} + u\mathbf{b}$$

$$\textcircled{7} 1\mathbf{a} = \mathbf{a}$$

$$\textcircled{8} 0\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

3. ベクトルが平行・同一直線上・同一平面上

① 平行 : $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \ (k \in R)$

② $A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{c})$ が同一直線上のとき,

(1) $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \ (k \in R)$ (A, B, C を入れ替えても成立する)

(2) $\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b} \ (s+t=1 \mid s, t \in R)$ (a, b, c を入れ替えても成立する)

(3) $\vec{c} = s\vec{a} + (1-s)\vec{b} \ (s \in R)$ (a, b, c を入れ替えても成立する)

③ $A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{c}), D(\vec{d})$ が同一直線上のとき,

(1) $\overrightarrow{AD} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \ (s, t \in R)$ (A, B, C, D を入れ替えても成立する)

(2) $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} \ (x+y+z=1 \mid a, b, c \in R)$

(a, b, c, d を入れ替えても成立する)

4. 位置ベクトル

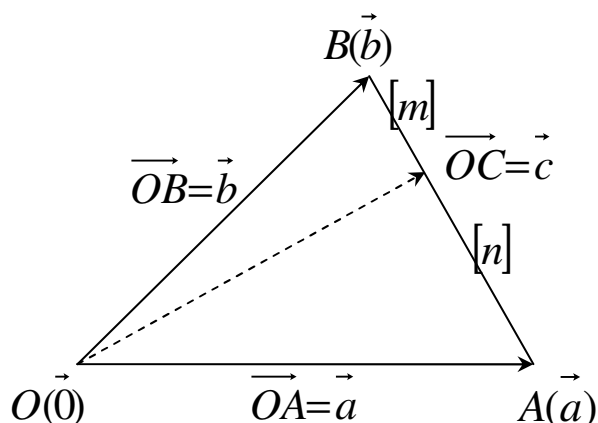
(例) 定点 O (原点) から点 P に向かうベクトル $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ を点 P の位置ベクトル

という. このとき, 点 P やこの位置ベクトル自体を $P(\vec{p})$ などと表す.

5. 内分・外分点のベクトル

$$BC : AC = m : n$$

$$\Rightarrow \vec{c} = \frac{m\vec{a} + n\vec{b}}{m+n} \quad (m, n \in \mathbb{R})$$



6. 重心

$A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{c})$ から成る三角形の

$$\text{重心 } G(\vec{g}) \text{ に対して, } \vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

7. (平面) ベクトルの 1 次独立 (2 次元, $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$)

(定義) $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{a} \neq k\vec{b} (\forall k \in \mathbb{R})$ のとき, $\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立であるという.

(つまり, $\vec{a}, \vec{b}$ が同一直線状に有り得ないとき)

(性質)

$$\textcircled{1} \quad \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \text{ の解が, } (x \ y) = (0 \ 0) \text{ しかない.}$$

$$\text{(例)} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2) \text{ とすれば,}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1x + a_2y \\ b_1x + b_2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1x + a_2y = 0 \\ b_1x + b_2y = 0 \end{cases}$$

この解が、 $(x \ y) = (0 \ 0)$ のみであれば、 $\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立

② $\vec{a}, \vec{b}$ と同じ次元（①の例では2次元）のベクトル $\vec{c}$ が、

$\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b} \quad (s, t \in R)$ と表すことができる.

8. (空間) ベクトルの1次独立 (3次元, $\vec{a}, \vec{b} \in R^3$)

(定義) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \neq \vec{0}$ かつ $A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{c})$ が同一平面上にないとき、

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は一次独立であるという.

(性質) 以下、7の平面の場合と同様. 4次元以降の場合も同様. 以降、省略.

9. 一次従属

…7や8のような定義や性質を満たさない場合、 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は一次従属であるという.

10. 基本ベクトル

(定義) ベクトルの成分のうち、一つの成分が1で他の全ての成分が0であるようなベクトルを基本ベクトルという.

<例>

・ R^2 (2次元平面) において、 $\vec{e}_1 = (1, 0)$ と $\vec{e}_2 = (0, 1)$

・ R^3 (3次元空間) において、 $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ と $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ と $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$

(性質) 全てのベクトルは、同じ次元空間の属する単位ベクトルを使って、ただ1通りに表せる (同値なものは同じ場合とカウント).

<例> (全ページの例に従う)

• R^2 (2次元平面) において, $\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2$ ($\vec{a}, \vec{e}_1, \vec{e}_2 \in R^2$ and $a_1, a_2 \in R$)

• R^3 (3次元空間) において,

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 \quad (\vec{a}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \in R^3 \text{ and } a_1, a_2, a_3 \in R)$$

• R^n (n次元平面) において, (文系は分からなくてもよい)

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^n a_i \vec{e}_i \quad (\vec{a}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \in R^n \text{ and } a_1, a_2, a_n \in R \mid \forall n \in R)$$

1.1. 成分による演算

• R^2 (2次元平面) において, $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ならば, $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

• R^3 (3次元空間) において, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ならば, $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

(内積の話)

• R^2 (2次元平面) において, $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ ならば,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1, a_2) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

• R^3 (3次元空間) において, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ならば,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

1 2. 内積に関して

・ R^2 (2次元平面) において, $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ と成す角度 θ

$$\textcircled{1} \quad |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$\textcircled{2} \quad \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$\textcircled{3} \quad \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$$

$$\textcircled{4} \quad O(\vec{0}), A(\vec{a}), B(\vec{b}) \text{ から成る三角形}$$

$$\cdot \Delta OAB = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$

$$\cdot \Delta OAB = \frac{1}{2} |a_1 b_2 - b_1 a_2|$$

・ R^3 (3次元空間) においても, 同様に考えよう.

1 3. 方向ベクトルとベクトル方程式

・ $A(\vec{a})$ を通り, $\vec{v}$ に平行な直線上を動く任意の $P(\vec{p})$

$$\Leftrightarrow \vec{p} = \vec{a} + t\vec{v} \quad (\vec{p}, \vec{a}, \vec{v} \in R^n \mid \forall t, n \in R)$$

※この $\vec{v}$ を方向を決めるベクトルなので, 方向ベクトルと呼ぶ.

・ $A(\vec{a})$ を通り, $\vec{v}$ に垂直な直線上を動く任意の $P(\vec{p})$

$$\Leftrightarrow (\vec{p} - \vec{a}) \cdot \vec{v} = 0 \quad (\vec{p}, \vec{a}, \vec{v} \in R^n \mid \forall n \in R)$$

- $C(\vec{c})$ を中心とする半径の r 円 (球) 上にある点 $P(\vec{p})$ において,

$$(\vec{p} - \vec{c}) \cdot (\vec{p} - \vec{c}) = r^2 \quad (\vec{p}, \vec{c} \in R^n \mid \forall n, r \in R)$$

- $A(\vec{a}), B(\vec{b})$ を両端とする円 (球) 上にある点 $P(\vec{p})$ において,

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0 \quad (\vec{p}, \vec{a}, \vec{b} \in R^n \mid \forall n \in R)$$

(直径の両端から伸ばした直線は円・球上で垂直に交わる)

(次のページへ続く)

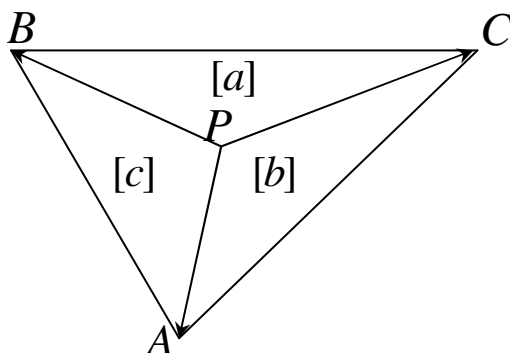
1.4. 図形の内部の点によって分割される図形の面積比・体積比

以下, $a, b, c, d \geq 0 \mid a, b, c, d \in R$ とする.

・ $\triangle ABC$ の内部に存在する点 P

$$a\overrightarrow{PA} + b\overrightarrow{PB} + c\overrightarrow{PC} = \vec{0} \quad (a\overrightarrow{AP} + b\overrightarrow{BP} + c\overrightarrow{CP} = \vec{0})$$

$$\Rightarrow \underline{\triangle BCP : \triangle ACP : \triangle ABP = a : b : c}$$



・ 四面体 $ABCD$ の内部に存在する点 P

$$a\overrightarrow{PA} + b\overrightarrow{PB} + c\overrightarrow{PC} + d\overrightarrow{PD} = \vec{0} \quad (a\overrightarrow{AP} + b\overrightarrow{BP} + c\overrightarrow{CP} + d\overrightarrow{DP} = \vec{0})$$

$$\Rightarrow \underline{BCDP : ACDP : ABDP : ABCP = a : b : c : d}$$

【証明】 (三角形の場合のみ)

$$a\overrightarrow{AP} + b\overrightarrow{BP} + c\overrightarrow{CP} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow a\overrightarrow{AP} = b\overrightarrow{PB} + c\overrightarrow{PC} = b(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}) + c(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP})$$

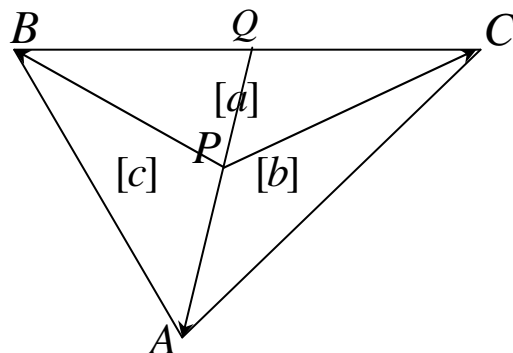
$$\Leftrightarrow a\overrightarrow{AP} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC} - (b+c)\overrightarrow{AP}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)\overrightarrow{AP} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{b}{a+b+c} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c} \overrightarrow{AC}$$

そこで, AP と BC の交点を Q とすれば,

$$\overrightarrow{AQ} = k\overrightarrow{AP} \quad (k \in R) \text{ とおける. よって,}$$



$$\overrightarrow{AQ} = k \left(\frac{b}{a+b+c} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c} \overrightarrow{AC} \right) = \frac{kb}{a+b+c} \overrightarrow{AB} + \frac{kc}{a+b+c} \overrightarrow{AC} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{より, } Q \text{ は } BC \text{ 上だから, } \frac{kb}{a+b+c} + \frac{kc}{a+b+c} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{k(b+c)}{a+b+c} = 1$$

$$\Leftrightarrow k(b+c) = a+b+c$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{a+b+c}{b+c}$$

$$\text{よって, } \overrightarrow{AQ} = \frac{a+b+c}{b+c} \overrightarrow{AP}$$

$$\Rightarrow \underline{AP : AQ = b+c : a+b+c} \quad \text{から} \quad \underline{AP : PQ = b+c : a}$$

$$\text{ゆえに, } \triangle BCP : \triangle ACP = a : b+c \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\text{さらに, } \textcircled{1} \text{より, } Q \text{ は } BC \text{ 上だから, } \underline{BQ : QC = c : b}$$

$$\triangle BCP = \triangle ABP + \triangle ACP \quad \text{から, } \triangle ABP : \triangle ACP = c : b \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \text{および} \textcircled{3} \text{より, } \underline{\triangle BCP : \triangle ACP : \triangle ABP = a : b : c}$$

付録4 複素数

(0) 複素数の性質

$$\textcircled{1} \quad x^2 = -1 \Leftrightarrow x = i \quad \therefore i^2 = -1 \Leftrightarrow \sqrt{-1} = i$$

(このような数を虚数という．実数ではない．)

$$\textcircled{2} \quad a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \quad \text{and} \quad b = d$$

$$\textcircled{3} \quad x^2 = -a (a > 0) \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{a}i$$

④ 判別式の発展

・ 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式を $D = b^2 - 4ac$ とすれば,

イ) $D > 0 \Leftrightarrow$ 異なる 2 つの実数解をもつ

ロ) $D = 0 \Leftrightarrow$ 実数の重解をもつ

ハ) $D < 0 \Leftrightarrow$ 異なる 2 つの虚数解をもつ

イ) or ロ) $\Leftrightarrow D \geq 0 \Leftrightarrow$ 実数解をもつ

(1) 解と係数の関係

$$\textcircled{1} \quad ax^2 + bx + c = 0 \text{ の 2 解を } \alpha, \beta \text{ とすると, } \alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$\textcircled{2} \quad ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \text{ の 3 解を } \alpha, \beta, \gamma \text{ とすると,}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}, \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

③応用：

2 数 α, β が解となる 2 次方程式は,

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0 \Leftrightarrow x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

(2) 以下の の事実は 2 次以上の方程式において当てはまる.

① 一つの解が, $x = a + \sqrt{b}$ のとき, もう一つの解は $x = a - \sqrt{b}$ となる.

例えば, このような解を持つ 2 次方程式は, $\{x - (a + \sqrt{b})\}\{x - (a - \sqrt{b})\}$

② 一つの解が, $x = a + bi$ のとき, もう一つの解は共役複素数 $x = a - bi$ となる.

例えば, このような解を持つ 2 次方程式は, $\{x - (a + bi)\}\{x - (a - bi)\}$

(3) $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 解を α, β とする.

判別式を $D = b^2 - 4ac$ とし, $f(x) = ax^2 + bx + c$ とする.

① $\alpha > k$ and $\beta > k \Leftrightarrow (\alpha - k) + (\beta - k) > 0$ and $(\alpha - k)(\beta - k) > 0$ and $D \geq 0$

② $\alpha < k$ and $\beta < k \Leftrightarrow (\alpha - k) + (\beta - k) < 0$ and $(\alpha - k)(\beta - k) > 0$ and $D \geq 0$

③ $\alpha > k > \beta$ or $\beta > k > \alpha \Leftrightarrow (\alpha - k)(\beta - k) < 0$

※ 特によく出るのは, $k = 0$ の場合. 入れてみて考えよ.

※ 2 次関数で習った方法を利用してもよい.

(4) 因数定理

① $P(x)$ を $x - k$ で割ったときの余りは $P(k)$

もし, $P(x)$ が $x - k$ で割り切れるなら, $P(k) = 0$

② $P(x)$ を $ax + b$ で割ったときの余りは $P\left(-\frac{b}{a}\right)$

(5) 次数下げ

(例) $a^2 + a + 1 = 0$ 両辺に $a - 1$ をかけて, $(a - 1)(a^2 + a + 1) = 0$

$\therefore a^3 - 1 = 0$ から $a^3 = 1$ これを利用して,

$a^{3000}, a^{2000}, a^{1000}$ を簡単に計算する. cf ; $a^{mn} = (a^m)^n$

付録5 解答の書き方などについての注意

はじめに

記述式の経済学や数学の設問に対する取り組み方というのは、本質論から言えば、多少極論めくが「問題の数だけある」という事になろう。或いは、せいぜい「1000問解いてみた結果、方法を99通りにまで絞り込む事ができました」という類のものになるのではないだろうか。つまり、学ぶものにとって「ワッ！たったこれだけでいいんだ！！」と喜べるような小さな数にまで絞り込む事は、本質的にはできないものであると考えられる。

かと思えば、「当たり次第に条件を式にしまくって、適当に式を組み合わせればつなげれば答えが出るのだ！」等という暴論を、まことしやかに吐く人がいたり、「経過の説明は“だから”“よって”“ゆえに”などの接続語を適時に式に混ぜとけば、○はもらえる」等といった、乱暴な考えも存在する。前者は学者にとって実用的活本質的な方法論たりえず、後者に至っては方法論とは言えない代物である。

そこで、筆者は普段の学習または試験における記述式数学・経済学への取り組むべき“姿勢”を述べることにしておく。以下のような地道な努力を怠り、徒に問題演習で自分流の数学・経済学を巻き散らかし続け、アドバイスを受けたとしても、決して力はつかないのだ。ただ以下は所詮、“姿勢”であり“解法”ではないので自ずと限界があろう。だが、「どうすればいいのだろう…？」と途方に暮れたり、「こんな答案でいいのだろうか…？」と不安にかられたりする時には、一つの指針と自信とを与えてくれるものとはなるではないか。

①問題文をじっくり読む

まず、問題文をじっくり読んで、「何を求めるのか」「何を与えられた条件か」を整理する事が大切（その際に、「0の場合を除く」「 x は0以上」などの仮定条件も確認！）である。そして、その問題を解くための方針を考えていく事になる。ただ、方針が思い浮かばない場合もあるだろう。その場合には、与えられた条件から導ける事は何か、答えを求めるには何が分かれば良いかというように2つの方向から考えてみてはどうか。また図形や関数系の問題などでは、条件を図やグラフに表し視覚的に考察する習慣も必要である。

また、複数の方針が思いついた場合には、どれが一番楽な方法であるかを検討し、普段の学習では採用しなかった方法も復習のためにメモしておいた方が良いでしょう。

②「良い答案」を心がける

数学という学問は、そもそも答えとなる数値や式を出すためのものではなく、各々の論理的思考能力を育成するというものであろう。経済学はその応用である。よってこのような本質から考えるならば、答えそのものよりもその答えを出すまでの“過程”が重要で、“過程”と“最終的な答え”総てを合わせて解答であり、記述式の試験では実際にその過程に多くの点数が与えられる。そこで、解答作成の際には、自分の論理的思考が採点者に理解してもらえるような「よい答案」を作る事が大切なのである。

○よい答案とは？

- I 論理の流れが明確で、簡潔にまとまっているもの。
- II 適切な言葉による説明がなされているもの
- III 丁寧な文字でかかれているもの

→自分ではなく全くの他人である採点者に見てもらおう事を意識した答案！

●逆に、悪い答案とは？

- I 数式の羅列だけで思考の過程が読み取れないもの
- II 回答の論理が破綻、または不明確な所があるもの
- III 言葉の使い方が適切ではないもの
- IV 自分だけにわかるわがままな説明がなされているもの
- V 汚い字でメモ書き風にかかれたもの

③わからない時も……まずは諦めずに考えぬく事が大切

試験中である時を除いて、思考錯誤して考えた時間は決して無駄にならず、自分の実となるであろう。また、それまで自分がやった問題を見つけ、それを真似て解く事も十分勉強になるのである。だが、どうしても解けなかった時は、わかるところまで書いて、自分の誤りを添削や自己採点等で考えてみるべきである。

④復習が最も大切！

○できた問題

…「ポイントを過不足なくまとめた答案」になっているかどうかチェックしてみよう。そこで添削や解答を参考に、何が足りないか（或いは何が余計なのか）について考えてみるべきであろう。また、自分の答案が「良い答案」の条件を満たしているかどうかを確認してみよう。

●できなかった問題

…まずはミスの原因を見つける事が第一である。計算ミス等の単なるケアレスミスなのか、それとも考え方の間違いなのかを、自分の方針の適切さまで含めて考えてみるべきであろう。

- ・ 計算ミスの時→単なるケアレスミスか？方針がまずかったために計算量が多くなったせいですか？
- ・ 考え方の間違いの時→そもそも方針は正しかったのですか？

☆そして最後に復習の結果をノートまたは問題集にチェックしておき、また別の日に見直しができるようにしておけばナイスである。

おわりに

以上の事を今まで意識してこなかった者にとっては、これらのことは難しそうに見えるだろうが、一問一問チャンと心がけていけば、必ず身につくことだと思われる。

著者紹介

我妻 さやか（あずま さやか） 市田ゼミ 2 期生

岡田 真大（おかだ まお） 市田ゼミ 3 期生

河野 愛一郎（こうの あいいちろう） 市田ゼミ 2 期生

高橋 伯明（たかはし のりみつ） 市田ゼミ 3 期生

中村 透（なかむら とおる） 市田ゼミ 3 期生

表紙は 2008 年 8 月 25 日午前 6 時頃の富士山上空の様子. 3 期生藤代恵が撮影.

経済数学トピックス 第2版 数学的手法の意義と意味

2007 年 12 月 23 日 第 1 版発行

2008 年 11 月 23 日 第 2 版発行

発行者 川浦 恵

発行所 早稲田大学 商学部 商業・貿易・金融コース

市田敏啓ゼミナール

〒169-8050 東京都新宿区西早稲田 1 丁目 6 番地 1 号

T E L 03-5286-1821

F A X 03-5286-1825

D T P 市田敏啓ゼミナール 数学サブゼミ実行委員会

印刷者 岡田 真大

表 紙 藤代 恵

©2008 Aiichiro Kohno

乱丁本・落丁本はお取替え致しません。

本書の一部あるいは全部について，著作者から文書による承諾を得ずにいかなる方法においても無断で転載・複写・複製することは固く禁じられています。

